الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

**Rattrapge Algèbre 2 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.**
**L'usage de la calculatrice est strictement interdit.**

**Exercice 01** : (**10 points**) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / 2a + 3b - 5c = 0\} \text{ et } E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / 4a - 3b = 0 \text{ et } 2b - 3c = 0\right\}.$$

(**1**) (**2 points**) Montrer que $E_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(**1**) (**3 points**) Sachant que $E_2$ est lui même un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base $B_1$ de $E_1$ et une base $B_2$ de $E_2$.

(**2**) (**0.5 point**) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(**3**) (**2 points**) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(**4**) (**2.5 points**) Déduire si la somme est directe ou non.

**Exercice 02** : (**10 points**) On considère l'application linéaire définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x, 3x - y, x + 5y).$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(**1**) (**1.5 point**) Donner la matrice $M$ associée à $f$ relativement aux bases $B_2$ et $B_3$.

(**2**) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une famille de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (-1,3)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une famille de $\mathbb{R}^3$, avec $w_1 = (0,1,-3)$, $w_2 = (-2,1,1)$ et $w_3 = (-2,-1,4)$.

**a**) (**2.5 points**) Montrer que $C_2$ et $C_3$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

**b**) (**1 point**) Trouver la matrice de passage $P_1$ de la base $B_2$ à la base $C_2$.

**c**) (**1 point**) Trouver la matrice de passage $P_2$ de la base $B_3$ à la base $C_3$.

**d**) (**2 points**) Si $V$ est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $B_3$, déterminer alors les composantes de $V$ dans la base $C_3$.

**e**) (**2 points**) Trouver la matrice $N$ associée à $f$ relativement aux bases $C_2$ et $C_3$.

**Bon courage.**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie
تلمسان الجزائر

**Rattrapge Algèbre 2 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.**

**L'usage de la calculatrice est strictement interdit.**

**Exercice 01** : (**10 points**) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les ensembles suivants :

$E_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/2a+3b-5c=0\}$ et $E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/4a-3b=0 \text{ et } 2b-3c=0\right\}$.

(**1**) (**Total** : **2 points**) Montrer que $E_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pour $E_1$ :

$$2a+3b-5c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3}{2}b+\frac{5}{2}c$$

$$\Rightarrow E_1 = \left\{\left(\frac{-3}{2}b+\frac{5}{2}c,b,c\right) \in \mathbb{R}^3/b,c \in \mathbb{R}\right\}.$$

**i)** (**0.5 point**) $(0,0,0) = \left(\frac{-3}{2}\times 0+\frac{5}{2}\times 0,0,0\right) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$.

**ii)** (**0.75 point**) Si $v_1,v_2 \in E_1 \Rightarrow v_1 = \left(\frac{-3}{2}b_1+\frac{5}{2}c_1,b_1,c_1\right)$ et $v_2 = \left(\frac{-3}{2}b_2+\frac{5}{2}c_2,b_2,c_2\right)$

$$\Rightarrow v_1+v_2 = \left(\frac{-3}{2}(b_1+b_2)+\frac{5}{2}(c_1+c_2),(b_1+b_2),(c_1+c_2)\right) \in E_1.$$

**iii)** (**0.75 point**) Si $v \in E_1, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \left(\frac{-3}{2}(\alpha b)+\frac{5}{2}(\alpha c),(\alpha b),(\alpha c)\right) \in E_1$.

Conclusion : $E_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(**2**) Sachant que $E_2$ est lui même un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**a)** (**Total** : **2 points**) Déterminons une base $B_1$ de $E_1$ et une base $B_2$ de $E_2$.

$$E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/4a-3b=0 \text{ et } 2b-3c=0\right\}$$

$$a = \frac{3}{4}b \text{ et } c = \frac{2}{3}b$$

$$u \in E_1 \Rightarrow u = \left(\frac{-3}{2}b+\frac{5}{2}c,b,c\right) = b\left(-\frac{3}{2},1,0\right)+c\left(\frac{5}{2},0,1\right),$$

alors $B_1 = \left\{\left(-\frac{3}{2},1,0\right),\left(\frac{5}{2},0,1\right)\right\}$ engendre $E_1$ (**1 point**) , mais :

$$\alpha\left(-\frac{3}{2},1,0\right)+\beta\left(\frac{5}{2},0,1\right) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta,\alpha,\beta\right) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha=\beta=0,$$ (**0.5 point**)

alors les deux vecteurs de $B_1$ sont linéairements indépendants (ou utiliser le déterminant mineur).

Ce qui implique que $B_1 = \left\{\left(-\frac{3}{2},1,0\right),\left(\frac{5}{2},0,1\right)\right\}$ (**0.5 point**) est une base de $E_1$.

**b)** (**Total** : **1 point**)

$$E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/4a-3b=0 \text{ et } 2b-3c=0\right\}$$

$$a = \frac{3}{4}b \text{ et } c = \frac{2}{3}b$$

$$u \in E_2 \Rightarrow u = \left(\frac{3}{4}b,b,\frac{2}{3}b\right) = b\left(\frac{3}{4},1,\frac{2}{3}\right)$$

alors $B_2 = \left\{\left(\frac{3}{4},1,\frac{2}{3}\right)\right\}$ engendre $E_2$, mais :

$$\alpha\left(\frac{3}{4},1,\frac{2}{3}\right) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0,$$

ce qui implique que $B_2 = \left\{\left(\frac{3}{4},1,\frac{2}{3}\right)\right\}$ est une base de $E_2$ (ou directement sans passer par libre).

(**2**) (**Total** : **0.5 point**) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1. \text{ (0.5 point)}$$

**Remarque** : La détermination des deux dimensions avec un raisonnement complètement faux dans la première question implique un zéro.

(**3**) (**Total** : **2 points**) Montrons que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

**a**) "$\supset$" $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$. (**0.5 point**)

**b**) " $\subset$" Soit:

$$u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta,\alpha,\beta\right) + \left(\frac{3}{4}\lambda,\lambda,\frac{2}{3}\lambda\right), \text{(0.5 point)}$$

ce qui implique que:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta + \frac{3}{4}\lambda \\ y = \alpha + \lambda \\ z = \beta + \frac{2}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = \frac{5}{2}\beta + \frac{9}{4}\lambda \\ z = \beta + \frac{2}{3}\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z = \frac{7}{12}\lambda$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = y - \frac{12}{7}\left(x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z\right) \\ \beta = z - \frac{8}{7}\left(x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z\right) \\ \lambda = \frac{12}{7}\left(x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z\right). \end{cases} \quad \text{(1 point)}$$

:

$$\Rightarrow u \in E_1 + E_2,$$

d'où :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

(**4**) (**Total** : **2.5 points**) Déduire si la somme est directe ou non.

**a**) (**0.5 point**)

$$\dim E_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1,$$
$$\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

ou bien on a:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

**b**) **i**) $\{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2$ car $E_1$ et $E_2$ sont deux sous espaces vectoriels. (**0.5 point**)

**ii**) De plus si: $u \in E_1 \cap E_2$ alors : (**1 point**)

$$u = \left(-\tfrac{3}{2}\alpha + \tfrac{5}{2}\beta, \alpha, \beta\right) \text{ et } u = \left(\tfrac{3}{4}\lambda, \lambda, \tfrac{2}{3}\lambda\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\tfrac{3}{2}\alpha + \tfrac{5}{2}\beta = \tfrac{3}{4}\lambda \\ \alpha = \lambda \\ \beta = \tfrac{2}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0,$$

$$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}.$$

Donc : (**0.5 point**)

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}, \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}, \end{cases}$$

ce qui implique que la somme est directe ($\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$).

**Exercice 02** : (**10 points**) On considère l'application linéaire définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x, 3x - y, x + 5y).$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(**1**) (**Total** : **1.5 point**) Donner la matrice $M$ associée à $f$ relativement aux bases $B_2$ et $B_3$.

$f(e_1) = f(1,0) = (2,3,1)$ et $f(e_2) = f(0,1) = (0,-1,5)$ (**0.25**+**0.25 point**)

alors :

$$M = \begin{array}{cc} f(e_1) f(e_2) & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

.(**0.25 chaque colonne**)+ (**0.5 sur l'écriture des vecteurs**)

(**2**) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une famille de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (-1,3)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une famille de $\mathbb{R}^3$, avec $w_1 = (0,1,-3)$, $w_2 = (-2,1,1)$ et $w_3 = (-2,-1,4)$.

**a**) (**Total** : **2.5 points**) Montrer que $C_2$ et $C_3$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

**i**) On a :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\} \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^2.$$ (**0.5point**)

De plus :

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = card C_2 \Rightarrow C_2 \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.$$ (**0.5 point**)

**ii**) On a :

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. (**1point**)

De plus :

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = cardC_3 \Rightarrow C3$ est une base de $\mathbb{R}^2$. (**0.5 point**)

**b**) (**Total** : **1 point**) Trouver la matrice de passage $P_1$ de la base $B_2$ à la base $C_2$.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$ . (**0.25 chaque colonne**)+ (**0.5 sur l'écriture des vecteurs**)

**c**) (**Total** : **1 point**) Trouver la matrice de passage $P_2$ de la base $B_3$ à la base $C_3$.

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$ . (**0.5 point**)+ (**0.5 sur l'écriture des vecteurs**)

**d**) (**Total** : **2 points**) Si $V$ est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $B_3$,

déterminer alors les composantes de $V$ dans la base $C_3$.

$V_{C_3} = Q^{-1} V_{B_3}$. (**0.25 point**)

Calculons alors la matrice inverse de $Q$ :

$$\det Q = -1 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$ (**0.25 point**)

la comatrice est :

$$comQ = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 6 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ (**0.5 point**) $$\Rightarrow {}^t(comQ) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & -6 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \tfrac{1}{\det Q} {}^t\big(com\ Q\big) \Rightarrow Q^{-1} = -\tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & -6 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$ (**0.25 point**)

$$V_{C_3} = Q^{-1} V_{B_3} = -\tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & -6 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 43 \\ -35 \\ 38 \end{pmatrix}.$$ (**0.75 point**)

**e**) (**Total** : **2 points**) Trouvons la matrice $N$ associée à $f$ relativement aux bases $C_2$ et $C_3$.

$$N(f, C_2, C_3) = Q^{-1}MP \quad \textbf{(0.5 point)}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & -6 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 32 & 14 \\ -22 & -4 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \textbf{(0.75 point)}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 78 & 10 \\ -48 & 10 \\ 60 & -16 \end{pmatrix}. \textbf{(0.75 point)}$$