Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵓⴱⵓⴱⴽⵔ ⴱⵍⵇⴰⵢⴷ ⵜⵍⵎⵙⴰⵏ
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 2

Examen final : Analyse 2

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (10 Pts)

I) 1) Déterminer les constantes a, b et c telle que

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

2) Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$I = \int f(x)dx.$$

II) Soit $a > 0$. On note par

$$I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t} \quad \text{et pour} \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{on pose} \quad I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt.$$

1) Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $I_1(a)$.
3) Montrer que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a), \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 2. (4 Pts)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

1) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Trouver les solutions de l'équation

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 3. (6 Pts)

1) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \to \ln(\cos(x) + \sin(x))$.

2) En déduire la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x) + \sin(x))}{x}$$

3) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f telle que $f(x) = \ln(\cos(x) + \sin(x))$ en $x = 0$ et préciser la position de T par rapport à la courbe au point 0.

1ère année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen final : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (10 Pts).

I)1) On a

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{(a+b)x^2+(b+c-a)x+a+c}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c-a=0 \\ (a+c)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=-1/3 \\ c=2/3 \end{cases} \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

D'où

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right].$$

2) Remarquons que

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx\right]. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

On pose

$$I=\int\frac{dx}{x+1} \quad \text{et} \quad J=\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx.$$

Alors, on a

$$I=\ln(x+1)+c_1, \quad c_1\in\mathbb{R}. \qquad (\mathbf{1Pt})$$

Pour J, on peut remarquer que

$$J=\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-3\int\frac{dx}{x^2-x+1}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Maintenant, pour l'intégrale $\int\frac{dx}{x^2-x+1}$, on remarque que

$$\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=2\int\frac{dx}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}$$
$$=2\int\frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

On pose $t=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx.$ $\quad$ **(1 Pt)** Donc,

$$2\int \frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1} = 2\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{t^2+1} = \sqrt{3}\arctan(t)+c_2, \quad c_2\in\mathbb{R},$$

$$= \sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))+c_2. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$\int f(x)dx = \frac{1}{3}\left[\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))\right]+c, \quad c\in\mathbb{R}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

II)1) On a

$$I_0(a)=\int_0^a \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a) \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

2) On a

$$I_1(a)=\int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2}.$$

On pose

$$\begin{cases} u(t)=t-a \Rightarrow u'(t)=1 \\ v'(t)=\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow v(t)=-\frac{1}{1+t} \end{cases} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Sachant que

$$\int_0^a u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^a - \int_0^a u'(t)v(t)dt,$$

alors

$$I_1(a)=\left[-\frac{(t-a)}{1+t}\right]_0^a + \int_0^a \frac{dt}{1+t} = -a+I_0(a) = -a+\ln(1+a). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) On fait encore une intégration par parties. On pose

$$\begin{cases} u(t)=(t-a)^{k+1} \Rightarrow u'(t)=(k+1)(t-a)^k \\ v'(t)=\frac{1}{(1+t)^{k+2}} \Rightarrow v(t)=\int(1+t)^{-k-2}dt = \frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases} \quad (\mathbf{1Pt})$$

D'où

$$I_{k+1}(a)=\left[-\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{(t-a)^k dt}{(1+t)^{k+1}}$$

$$= \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + I_k(a). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 2. (4 Pts).

1) Remarquons que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad -1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1,$$

car $x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0 \Rightarrow x^2+1\ge 2x$ et $-1-x^2-2x=-(1+x)^2\le 0 \Rightarrow -(1+x^2)\le 2x$. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$. **(1.5 Pts)**

2) On a

$$\arcsin(\frac{2x}{1+x^2})=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}=\sin(\frac{\pi}{3}).$$

Donc,

$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0....(E). \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

Les solutions de l'équation (E) sont

$$x_1=\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 3. (6 Pts).

1) Remarquons que le DL de $\sin(x)+\cos(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est

$$\sin(x)+\cos(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \quad (\mathbf{1Pt})$$

D'autre part, on sait que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi, si on pose $u = x - \frac{x^2}{2}$, **(0.5 Pt)** alors on a

$$\ln(\sin(x)+\cos(x)) = \ln(1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2})^2 + o(x^2) = x - x^2 + o(x^2). \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x)+\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^2 + o(x^2)}{x} = 1. \quad (\mathbf{1Pt})$$

3) La droite d'équation $y = x$ est la tangente T de la courbe de f en 0. **(0.5 Pt)**
De plus,

$$f(x) - x = -x^2 + o(x^2).$$

Ainsi, $f(x) - y \leq 0$ **(0.5 Pt)** au voisinage de 0 et par suite, la courbe de f est au dessous de la tangente T a voisinage de 0. **(0.5 Pt)**