الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد

Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Epreuve finale Algèbre 2 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.
L'usage de la calculatrice est strictement interdit.

Exercice 01 : (8 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux sous espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y = 0\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y = 0 \text{ et } z - 5x = 0\right\}.$$

(1) (3 points) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(2) (0.5 point) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(3) (2 points) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(4) (2.5 points) Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 02 : (2 points) Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Gauss.

Exercice 03 : (10 points) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ (l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égale à 2), on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \quad &\mapsto \quad f(P) = 2P(2)\left(X^2 + X\right) - 3P'(2)X + 4P''(2)(X+1). \end{aligned}$$

(1) (2 points) Trouver M la matrice associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Soient $B' = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $Q_1 = 2X^2 - 5X + 1$, $Q_2 = 3X^2 - X - 2, Q_3 = 5X^2 + X + 2$.

a) (1 point) Trouver la matrice de passage $P_{B \to B'}$ de la base canonique B à la base B'.

b) (2 points) Trouver la matrice de passage $R_{B' \to B}$ de la base B'à la base canonique B

c) (3 points) Trouver les composantes de $Q = 2X^2 + 3X + 4$ dans la base B ensuite dans la base B'.

d) (2 points) Trouver N la matrice associée à f relativement à la base B'.

Bon courage.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid — جامعة آبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Epreuve finale Algèbre 2 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.
"*Le corrigé* "

Exercice 01 : (8 points)

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y = 0\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y = 0 \text{ et } z - 5x = 0\right\}.$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 0 \Rightarrow x = -3y. \\ (x - 3y &= 0 \text{ et } z - 5x = 0) \Rightarrow x = 2y \text{ et } z = 5x = 10y. \end{aligned}$$

$$E_1 = \left\{(-3y, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(2y, y, 10y) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\right\}.$$

(2) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = \left(-\frac{3}{2}y, y, z\right) = y\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) + z\,(0,0,1),$$

alors $B_1 = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right), (0,0,1)\right\}$ engendre E_1 **(1 point)** , mais :

$$\begin{array}{l} \alpha\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) + \beta\,(0,0,1) = (0,0,0) \\ \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\alpha, \alpha, \beta\right) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0, \end{array} \quad \textbf{(0.5 point)}$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairement indépendants (ou utiliser le déterminant mineur).

Ce qui implique que $B_1 = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right), (0,0,1)\right\}$ **(0.5 point)** est une base de E_1.

b) **(1 point)**

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (3y, y, 15y) = y\,(3,1,15)$$

alors $B_2 = \{(3,1,15)\}$ engendre E_2, mais :

$$\alpha\,(3,1,15) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0,$$

ce qui implique que $B_2 = \{(2,1,10)\}$ est une base de E_2 (ou directement sans passer par libre).

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$:

$$\dim E_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1. \ \textbf{(0.5 point)}$$

(4) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

a) $" \supset "E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.**(0.5 point)**

b) $" \subset "$Soit:

$$u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (a, b, c) = \left(-\frac{3}{2}y, y, z\right) + (3\alpha, \alpha, 15\alpha)\,, \textbf{(0.5 point)}$$

ce qui implique que:

$$\left\{\begin{array}{l} a = -\frac{3}{2}y + 3\alpha \\ b = y + \alpha \\ c = z + 15\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{2}{9}(a + \frac{3}{2}b) \\ y = b - \frac{2}{9}(a + \frac{3}{2}b) = -\frac{2}{9}a + \frac{2}{3}b \\ z = c - 15 \times \frac{2}{9}(a + \frac{3}{2}b) = c - 5b - \frac{10}{3}a. \end{array}\right. \quad \textbf{(1 point)}$$

$$\Rightarrow u \in E_1 + E_2,$$

d'où :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

(5) On déduire que : $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

a) **(0.5 point)**

$$\begin{array}{l} \dim E_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1, \\ \Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3, \end{array}$$

ou bien on a:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

b) i) $\{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2$ car E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels. **(0.5 point)**

ii) De plus si: $u \in E_1 \cap E_2$ alors : **(1 point)**

$$\begin{array}{l} u = \left(-\frac{3}{2}y, y, z\right) \text{ et } u = (3\alpha, \alpha, 15\alpha) \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}y = 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = 10\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = y = z = 0, \\ \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}\,. \end{array}$$

Donc : **(0.5 point)**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}\,, \end{array}\right.$$

ou bien :

$$\left\{\begin{array}{c} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}\,, \end{array}\right.$$

ce qui implique que la somme est directe $\left(\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2\right)$.

Exercice 02 : (2 points) Calculons l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Gauss.

Solution :

Opérations sur les lignes	$A \to$	$I \to$
L_1 L_2	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
L_1 $L_2 - \frac{7}{2}L_1$	**(0.25 point)** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **(0.5 point)**
$L_1 + \frac{6}{17}L_2$ L_2	**(0.25 point)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{4}{17} & \frac{6}{17} \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **(0.5 point)**
$\frac{L_1}{2}$ $\frac{2L_2}{17}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{7}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} = A^{-1}$.**(0.5 point)**

Exercice 01 : (11 points) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{ccl} f & : & \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & f(P) = 2P(2)\left(X^2 + X\right) - 3P'(2)X + 4P''(2)(X+1). \end{array}$$

(1) Trouvons M la matrice associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}_2[X]$. On a :

$f(1) = 2\left(X^2 + X\right), f(X) = 4X^2 + X$ et $f\left(X^2\right) = 8X^2 + 4X + 8$, **(3×0.25 point)**

alors:

$$M(f,B) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f\left(X^2\right) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \quad \textbf{(1.25 point)}$$

(2) Soient $B' = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $Q_1 = 2X^2 - 5X + 1$, $Q_2 = 3X^2 - X - 2, Q_3 = 5X^2 + X + 2$.

a) Trouver la matrice de passage $P_{B \to B'}$ de la base canonique B à la base B'.

$$P_{B \to B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}., \quad \textbf{(1 point)}$$

b) Trouver la matrice de passage $R_{B'\to B}$ de la base B'à la base canonique B. Cette matrice est exactement $P^{-1}_{B\to B'}$.

$$\begin{aligned}
R &= P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^{t}(comP)\,, \\
\det P &= 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -8-54-26=-88.\ \textbf{(0.5 point)} \\
comP &= \begin{pmatrix} -8 & 27 & -13 \\ 16 & 1 & -7 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow\ R_{B'\to B} = \frac{-1}{88}\begin{pmatrix} -8 & 16 & 0 \\ 27 & 1 & -11 \\ -13 & -7 & -11 \end{pmatrix}.\textbf{(1 point)}
\end{aligned}$$

c) Trouver les composantes de $Q = 2X^3 + 3X^2 + 4$ dans la base B ensuite dans la base B'.

$$Q_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\textbf{(1 point)}$$

et:

$$\underbrace{Q_{B'} = RQ_B}_{\textbf{(0.5 point)}} = \frac{-1}{88}\begin{pmatrix} -8 & 16 & 0 \\ 27 & 1 & -11 \\ -13 & -7 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{88} \\ \frac{-89}{88} \\ \frac{95}{88} \end{pmatrix}.\textbf{(1.5 point)}$$

d) Trouver N la matrice associée à f relativement à la base B'.

$$\begin{aligned}
N(f,B') &= R\times M(f,B)\times P \quad \textbf{(0.5 point)} \\
&= \frac{-1}{88}\begin{pmatrix} -8 & 16 & 0 \\ 27 & 1 & -11 \\ -13 & -7 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{88}\begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 \\ -20 & -43 & 132 \\ -36 & -51 & -220 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \textbf{(05 point)} \\
&= \begin{pmatrix} -48 & -80 & 80 \\ 459 & 479 & 577 \\ -221 & -537 & -1223 \end{pmatrix}.\textbf{(1 point)}
\end{aligned}$$