Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 2

Contrôle continu : Analyse 2

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4 Pts)

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Montrer que f est décroissante.

2) En déduire que

$$\forall x \in]-1,0[, \quad \arcsin(x) > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 2. (6 Pts)

1) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \cosh(x) + \sinh(x).$$

2) On note par $y = \arg\sinh(x)$ la fonction inverse de $\sinh(x)$.
En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Exercice 3. (5 Pts)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x + e^{-x}$.

1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange de f avec un reste à l'ordre 3 sur $[0,x]$.

2) Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad 0 < \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3 \sinh(x)}{6}.$$

Exercice 4. (5 Pts)

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(2x) - 2e^{-x}\ln(1+x)}{x^2}.$$

1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

2) En déduire la valeur de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2e^{-x}\ln(1+x)}{x^2}.$$

On donne :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$1^{\text{ère}}$ année M.I - Semestre 2

Corrigé du contrôle continu : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4 Pts)

1) On a

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Calculons la dérivée de f.

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left[\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left[\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{1}{1-x^2}\right] = -\frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \leq 0.\end{aligned}$$

Donc, f est décroissante sur $]-1,1[$. (**2Pts**)

2)Remarquons que $f(0) = \arcsin(0) - \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$. **(0.5 Pt)**
Donc, Si $x < 0$, alors $f(x) > f(0) = 0$. **(0.5 Pt)**
Ceci implique que $\arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$. **(0.5 Pt)** Ainsi,

$$\forall x \in]-1,0[, \quad \arcsin(x) > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 2. (6 Pts)

1) Sachant que $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, **(0.5 Pt)** alors

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e^{2x}+e^{-2x}+2) - (e^{2x}+e^{-2x}-2)\right] = \frac{4}{4} = 1. \quad (\mathbf{1Pt})$$

D'autre part,

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = 2\frac{e^x}{2} = e^x. \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) On note par $y = \arg\sinh(x)$. Alors, $\sinh(y) = x$. **(0.5 Pt)**
On sait que $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ qui implique que

$$\cosh^2(y) = 1 + \sinh^2(y) = 1 + x^2.$$

Donc, $\cosh(y) = \sqrt{1+x^2}$. **(1.5 Pt)**
D'autre part, on a

$$e^y = \cosh(y) + \sinh(y) \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

qui implique que

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 3. (5 Pts)

1) La fonction f est de classe C^2 sur $[0,x]$ et de classe C^3 sur $]0,x[$. **(0.5 Pt)** Alors d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0,x[$ **(0.5 Pt)** telle que

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \frac{x^2 f^3(c)}{3!}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Remarquons que $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ et $f^3(x) = e^x - e^{-x}$. Donc,

$$f(x) = 2 + x^2 + \frac{x^3(e^c - e^{-c})}{6}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

2)En divisant chaque membre de l'égalité précédente par 2, on obtient

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3 \sinh(c)}{6}.$$

Donc,

$$\cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3 \sinh(c)}{6}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Puisque $0 < c < x$ et $\sinh(c)$ est une fonction croissante, alors $\sinh(0) < \sinh(c) < \sinh(x)$. **(0.5 Pt)**

Ainsi,

$$0 < \frac{x^3 \sinh(c)}{6} < \frac{x^3 \sinh(x)}{6}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Ceci implique que

$$\forall x > 0, \qquad 0 < \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3 \sinh(x)}{6}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Exercice 4. (5 Pts)

1) Le développement limité de $\sin(2x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 est

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^5}{120} + o(x^5) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5). \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Le développement limité de e^{-x} au voisinage de 0 à l'ordre 5 est

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5). \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)) - 2(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5))}{x^2} \\
&= \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} - 2(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{24}) + o(x^5)}{x^2} \\
&= \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} - 2x + 3x^2 - \frac{8x^3}{3} + 2x^4 - \frac{89x^5}{60} + o(x^5)}{x^2} \\
&= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{73x^3}{60} + o(x^3). \quad \textbf{(3Pts)}
\end{aligned}$$

2) On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2e^{-x}\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(3 - 4x + 2x^2 - \frac{73x^3}{60} + o(x^3)\right) = 3 \quad \textbf{(1Pt)}$$