الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Contrôle continu Algèbre 2 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.
L'usage de la calculatrice est strictement interdit.

Exercice 01 : (9 points)

(1) (3.5 points) Effectuer la division suivant les puissance croissante à l'ordre 3 du polynôme P par Q où :

$$P(X) = 3X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 + 4X + 3 \text{ et } Q(X) = X^2 + X + 2.$$

(2) (1.5 point) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de la racine $x_0 = 2$ du polynôme suivant :

$$P(x) = nx^{n+2} - (4n+1)x^{n+1} + 4(n+1)x^n - 4x^{n-1}.$$

(3) (4 points) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{2-x}{(x^4+4x^2)(x-3)}.$$

Exercice 02 : (7 points) On munit $E = \mathbb{R} - \{-4\}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall x, y \in E, x * y = xy + 4(x+y+3).$$

(1) (1.5 point) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne dans E.

(2) (4 points) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

(3) (1.5 point) Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f & : & (\mathbb{R}^*, \times) \to (E, *) \\ x & \mapsto & f(x) = x - 4. \end{array}$$

Montrer que f est un morphisme de groupes.

Exercice 03 : (4 points) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels?

(1) (2 points) $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\right\}$.

(2) (1 point) $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \text{ est une fonction croissante}\}$.($\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions)

(3) (1 point) $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X]$ (ensemble des polynômes de degré ≤ 3/ $P(0) = 3\}$.

Bon courage.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد

Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Contrôle continu Algèbre 2 - MI - 2021-2022. Le corrigé.

Exercice 01 : (9 points)

(1) (3.5 points) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 du polynôme P par Q où :

$$P(X) = 3X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 + 4X + 3 \text{ et } Q(X) = X^2 + X + 2.$$

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 3 + 4X - X^2 + X^3 + 2X^4 + 3X^5 & 2 + X + X^2 \\
\hline
 & -(3 + \frac{3}{2}X + \frac{3}{2}X^2) & \frac{3}{2} + \frac{5}{4}X - \frac{15}{8}X^2 + \frac{13}{16}X^3 \\
 & \frac{5}{2}X - \frac{5}{2}X^2 + X^3 & 0.25+0.75+0.75+0.75 \\
\text{1point} & -\left(\frac{5}{2}X + \frac{5}{4}X^2 + \frac{5}{4}X^3\right) & \\
 & \frac{-15}{4}X^2 - \frac{1}{4}X^3 & \\
 & -(\frac{-15}{4}X^2 - \frac{15}{8}X^3) & \\
 & \frac{13}{8}X^3 &
\end{array}$$

(2) (1.5 point) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de la racine $x_0 = 2$ du polynôme suivant :

$$P(x) = nx^{n+2} - (4n+1)x^{n+1} + 4(n+1)x^n - 4x^{n-1}.$$

0.25 pt $P(2) = 4n \times 2^n - 2(4n+1)2^n + 4(n+1)2^n - 2 \times 2^n = 0 \Rightarrow 2$ est une racine.

0.25 pt $P'(x) = n(n+2)x^{n+1} - (4n+1)(n+1)x^n + 4n(n+1)x^{n-1} - (n-1)4x^{n-2} \Rightarrow P'(2) = 0$.

1 pt le reste $P''(x) = n(n+1)(n+2)x^n - n(4n+1)(n+1)x^{n-1} + 4n(n+1)(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)4x^{n-3}$,

$\Rightarrow P''(2) = 2^n(2n-1) \neq 0$. Alors 2 est une racine d'ordre de multiplicité 2.

(3) (4 points) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2-x}{x^2(x^2+4)(x-3)} \\ &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\alpha_3}{x-3} + \frac{\alpha_4 x + \alpha_5}{x^2+4} . 0.75 \text{ pt} \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \lim_{x \to 0} \frac{2-x}{(x^2+4)(x-3)} = -\frac{1}{6} . 0.5 \text{ pt}$$

$$\alpha_3 = \lim_{x \to 3} \frac{2-x}{x^2(x^2+4)} = -\frac{1}{117} . 0.5 \text{ pt}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2i} \alpha_4 x+\alpha_5 &= \lim_{x\to 2i} \frac{2-x}{x^2\,(x-3)} = \frac{2-2i}{-4(2i-3)} \\
&= \frac{(1-i)\,(-2i-3)}{-2(2i-3)(-2i-3)} = \frac{5}{26}-\frac{1}{26}i.
\end{aligned}$$

Donc :

$$0.75 \text{ pt } \alpha_5 = \frac{5}{26} \text{ et } \alpha_4 = -\frac{1}{52}.0.75 \text{ pt}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} xf(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\frac{\alpha_3}{x-3}+\frac{\alpha_4 x+\alpha_5}{x^2+4}\right) \\
&\Rightarrow\ 0=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{117}+\frac{1}{52}=\frac{1}{36}.0.75 \text{ pt}
\end{aligned}$$

Exercice 02 : (7 points)

Solution : On munit $E=\mathbb{R}-\{-4\}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall x,y\in E, x*y = xy+4\,(x+y+3)\,.$$

(1) Vérifions que $*$ est une loi de composition interne dans E.

Pour que $*$ est une l.c.i dans E il suffit de montrer que :

$$\forall x,y\in E; x*y = xy+4\,(x+y+3)\neq -4.0.5 \text{ pt}$$

Par l'absurde, on suppose que :(1 point)

$$\begin{aligned}
xy+4\,(x+y+3) &= -4 \Rightarrow xy+4x+4y+16=0 \\
&\Rightarrow\ x\,(y+4)+3\,(y+4)=0 \\
&\Rightarrow\ (x+4)\,(y+4)=0, \\
&\Rightarrow\ x=-4 \text{ ou } y=-4 \text{ contradiction car } x,y\in E.
\end{aligned}$$

Donc $\forall\,(x,y)\in E^2, x*y\in E$ donc la loi $*$ est interne dans E.

(2) Montrons que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

(a) La commutativité : $\forall\,(x,y)\in E^2$,0.5 pt

$$x*y = xy+4\,(x+y+3) = yx+4\,(y+x+3) = y*x,$$

alors $*$ est commutative.

(b) (1 point) L'associativité : $\forall x,y,zc\in E; (x*y)*z = x*(y*z)$?

Soient $x, y, z \in E$;

$$\begin{aligned}
(x*y)*z &= [xy+4(x+y+3)]*z \\
&= [xy+4(x+y+3)]z+4[(xy+4(x+y+3)+z+3)] \\
&= xyz+4xz+4yz+12z+4xy+16x+16y+4z+60...(1).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
x*(y*z) &= x*(yz+4(y+z+3) \\
&= x(yz+4(y+z+3)+4[x+yz+4(y+z+3)+3] \\
&= xyz+4xy+4xz+12x+4x+4yz+16y+16z+60...(2).
\end{aligned}$$

$(1)=(2) \Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z)$.
Alors $*$ est associative.

(c) L'existence de l'élément neutre :

Puisque $*$ est commutative, il suffit de résoudre l'équation :

$$\forall x \in E, x*e = x.0.25 \text{ pt}$$

Soit $x \in E$:0.75 pt le reste

$$\begin{aligned}
x*e &= x \Rightarrow xe+4(x+e+3)=x \\
&\Rightarrow e(x+4) = -3x-12 \\
&\Rightarrow e = \frac{-3x-12}{(x+4)} = -3\frac{(x+4)}{(x+4)} = -3 \text{ car : } x \neq -4.
\end{aligned}$$

Alors l'élément neutre est : $e = -3 \in E$.

(d) L'existence de l'élément symétrique pour chaque élément a :

$$\forall x \in E, \exists x^{-1} \in E; x*x^{-1} = e? \ 0.25 \text{ pt}$$

Soit $x \in E$:0.75 pt le reste

$$\begin{aligned}
x*x^{-1} &= e \Rightarrow xx^{-1}+4\left(x+x^{-1}+3\right) = -3 \\
&\Rightarrow x^{-1}(x+4) = -4x-15 \\
&\Rightarrow x^{-1} = \frac{-4x-15}{x+4} \text{ qui existe } \forall x \in E, \text{car } x \neq -4.
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que :

$$x^{-1} \in E \Leftrightarrow x \neq -4.$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in E$ et $x^{-1} = -4$, donc : 0.5 pt

$$\begin{aligned}
\frac{-4x-15}{x+4} &= -4 \Rightarrow -4x-15 = -4x-16 \\
&\Rightarrow -15 = -16 \text{ (contradiction)} \\
&\Rightarrow x^{-1} \neq -4 \Rightarrow x^{-1} \in E.
\end{aligned}$$

Conclusion: $(E, *)$ est un groupe abélien (commutatif).

(3) Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f & : & (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (E, *) \\ x & \mapsto & f(x) = x - 4. \end{array}$$

Montrons que f est un morphise de groupes.

(a) Notons que : $(\mathbb{R}^*, \times)$ (evident) et $(E, *)$ (d'après la première question) sont deux groupes. 0.5 pt

(b) Il reste à montrer que :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, f(x_1 \times x_2) = f(x_1) * f(x_2)?\ 0.25 \text{ pt}$$

En effet :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, f(x_1 \times x_2) = f(x_1 x_2) = (x_1 x_2) - 4, ...(\alpha)$$

D'autre part : 0.75 pt le reste

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) * f(x_2) & = & (x_1 - 4) * (x_2 - 4) \\ & = & (x_1 - 4)(x_2 - 4) + 4[(x_1 - 4) + (x_2 - 4) + 3] \\ & = & x_1 x_2 - 4x_1 - 4x_2 + 16 + 4x_1 + 4x_2 - 20 \\ & = & x_1 x_2 - 4, ...(\beta) \end{array}$$

$(\alpha) = (\beta)$, alors :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, f(x_1 \times x_2) = f(x_1) * f(x_2).$$

Conclusion : f est un homomorphisme de groupes.

Exercice 03 : (4 points) Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

(1) (2 points) $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\right\}$.

$$E_1 = \{(x, y, 2x + 3y)\,; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) $(0, 0, 0) = (0, 0, 2 \times 0 + 3 \times 0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$.0.5 pt

b) Si $v_1, v_2 \in E_1$:0.75 pt

$v_1 = (x_1, y_1, 2x_1 + 3y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, 2x_2 + 3y_2)$
$\Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)) \in E_1$.

c) 0.75 pt

Si $v = (x, y, 2x + 3y) \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors : $\alpha v = (\alpha x, \alpha y, 2(\alpha x) + 3(\alpha y)) \in E_1$.

Alors E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) (1 point) $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f$ est une fonction croissante$\}$.($\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions)

E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car :
Pour :

$$\alpha < 0 \text{ et } f \in E_2 \Rightarrow \alpha f \notin E_2 \text{ car elle est décroissante.}$$

(3) (1 point) $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X]$ (ensemble des polynômes de degré ≤ 3/ $P(0) = 3\}$.

E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel car :
Le polynôme nul (l'élément neutre) $P_0 \notin E_3$.