Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2021–2022

Analyse1
Fiche de TD 4 : Fonctions d'une variable réelle.

Exercice 1. Calculer les limites des fonctions suivantes

$$1)\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right),\qquad 2)\ \lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x}),$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1},\quad n\in\mathbb{N}^*,\qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin(3x^2)}{x^6+3x^2}}.$$

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes

$$1) f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}\qquad 2) f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Exercice 3. Établir si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en $x_0=0$.

$$1) f(x)=\frac{e^x-1}{\sqrt{|x|}},\qquad 2) f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x>0,\\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Exercice 4. 1) Montrer que l'équation $x^3-3x=3$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3-3x=k$ selon les valeurs de k.

Exercice 5. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes

$$1) f(x)=x|x|,\qquad 2) f(x)=\begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & \text{si } x\neq 1,\\ 1 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$.
1) Montrer que $\forall x<0,\quad \exists c\in]x,0[$ tel que $xe^c=e^x-1$.
2) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x\leq 0,\\ ax & \text{si } x>0,\end{cases}$$

où $a\in\mathbb{R}$.
a)Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
b)Pour quelles valeurs de a, la fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} x(\ln(1+x) - \ln(x))$ et en déduire

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Exercice 8. (Facultatif) Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}, \qquad 2) \lim_{x \to 0} x^2 E(\frac{1}{x}), \qquad 3) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)},$$

$$4) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \qquad 5) \lim_{x \to +\infty} \frac{x\ln(x) + 5}{x^2 + 4} \qquad 6) \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Exercice 9. (Facultatif) I) En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right).$$

II) Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Calculer f' et f''.

3) Montrer que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et en déduire que la fonction f est croissante.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 10. (Facultatif) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x+1} & \text{si } x > 0, \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur du paramètre a pour que la fonction f soit continue.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f.

Exercice 9. (Facultatif) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que

$$2f'(c) = f(2) - f(0).$$

4) Déterminer toutes les valeurs possible de c.