Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵓⴱⵓⴱⴽⵔ ⴱⵍⵇⴰⵢⴷ
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2021–2022

Analyse1
Fiche de TD 3 : Les suites réelles.

Exercice 1. En utilisant la définition de la convergence d'une suite, vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2+3} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 2. Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\cos(n)}{n-\sin(n)} \qquad 2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-1)^n+1}{2n(-1)^n+3} \qquad 3)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))}$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+9+...+3^n}{3^{n+1}}, \quad 5)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+..+\frac{n}{n^2+n}, \quad 6)\ \lim_{n\to+\infty} n^2 2^{-n}$$

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite vérifie $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Exercice 4. I) Soit

$$x = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(2021)^2}.$$

1) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2) En déduire que

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(2021)^2} < 1.$$

3) Déterminer $E(x)$, la partie entière de x.

II) Soit (u_n) la suite à termes strictement positifs définie par

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
2) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2, \quad u_n^2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$.
3) En déduire que (u_n^2) est majorée.
4) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5. On supposera que $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que les suites

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

sont adjacentes, et en déduire qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 6. (Facultatif) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right), \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.

Exercice 7. (Facultatif)Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}^+$.
1)Monter que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2)Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$.
3)En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 8. (Facultatif) I) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
II) On rappelle que la partie entière d'un nombre réel α est l'unique entier, noté $E(\alpha)$, vérifiant $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha) + 1$. Etablir que $\alpha - 1 < E(\alpha) \leq \alpha$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + ... + E(n\pi)}{n^2}.$$

1) Montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{\pi(n+1) - 2}{2n} < u_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}.$$

2) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9. (Facultatif) Déterminer (quand elle existe) la limite, quand $n \to +\infty$, des suites numériqurs suivantes :

$$1)\ U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad 2)\ U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$3)\ U_n = \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}, \qquad 4)\ U_n = \frac{2n^3 + n^2 + 1}{-n^3 + n + 1},$$

$$5)\ U_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}, \qquad 6)\ U_n = \frac{2n + 1 - \cos n\pi}{n}.$$

Exercice 10. (Facultatif) Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{3U_n + 2} \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

1) Montrer que $\forall n \geq 0$, $U_n > 0$.
2) Vérifier que l'équation $x = \frac{x+2}{3x+2}$ n'admet qu'une solution positive a.
3) Montrer que $\forall n \geq 0$, $|U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 11. (Facultatif) Soient (U_n) et (V_n) deux suites définie par $U_0 > V_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}, \qquad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}.$$

a) Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $U_n \geq 0$, $V_n \geq 0$ et $U_n \geq V_n$.
b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante minorée et la suite (V_n) est croissante majorée.
c) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.
d) Montrer que la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - V_n$ a pour limite 0. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite.