Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2021–2022

Analyse1
Fiche de TD 2 : Les nombres complexes.

Exercice 1. I) Écrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}, \qquad (\sqrt{3}+i)^6, \qquad \frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

II) Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants

$$1-i\sqrt{3}, \qquad \frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}, \qquad a\frac{(1-i\tan(\alpha))}{1+i\tan(\alpha)}, \quad (a>0, \quad \alpha\in\mathbb{R}).$$

Exercice 2. I) Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants

$$i, \qquad 3+4i, \qquad \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

II) Déterminer les nombres complexes solutions des équations suivantes

$$z^3+8=0, \qquad z^4+i=0.$$

Exercice 3. 1) Calculer les racines n-ième de $-i$ et $1+i$.
2) Résoudre l'équation $z^2-z+1-i=0$.
3) En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

Exercice 4. 1) Déterminer les nombres complexes solutions de $z^4=1$.
2) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $z^4=8(1-i\sqrt{3})$.
3) Soit $a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifier que $a^4=8(1-i\sqrt{3})$ et en déduire sous forme algébrique les résultats du 2).
4) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

Exercice 5. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z\in\mathbb{C}, z\neq -i, \quad f(z)=\frac{z-2}{z+i}.$$

1) Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z)\in\mathbb{R}$.
2) Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z)\in i\mathbb{R}$.

Exercice 6. (Facultatif)Trouver les lieux géométriques suivants

$$1) 0 < Re(iz) < 2, \qquad 2) Re(z) - Im(z) < 1, \qquad 3) |\overline{z} - 4 + i| = 1,$$

$$4) Re(\frac{1}{z}) = 2, \qquad 5) |z - i| = 3, \qquad 6) \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 7. (Facultatif) 1) Résoudre l'équation $z^3 = 1$ en utilisant la forme exponentielle.
2) On note j la solution complexe de partie imaginaire positive.
a) Vérifier que j^2 est aussi solution.
b) Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$
c) Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 8. (Facultatif) Montrer que

$$(|z| = 1 \quad \text{et} \quad z \neq 1) \Rightarrow i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. (Facultatif) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et considérons un nombre complexe $z = \cos^2(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\theta)$.
1) Déterminer θ tel que $z = 0$.
2) Si $z \neq 0$, calculer $z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}$.

Exercice 10. (Facultatif) Soit z un nombre complexe vérifiant $|z| = 1$.
Montrer que

$$Arg(\frac{z-1}{z+1}) \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } Imz > 0, \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } Imz < 0 \end{cases}$$

Exercice 11. (Facultatif) 1)Démontrer que

$$1 + e^{i\pi/5} + e^{i2\pi/5} + e^{i3\pi/5} + e^{i4\pi/5} = \frac{2}{1 - e^{i\pi/5}}.$$

2) En déduire les valeurs des sommes

$$S = \sum_{k=0}^{4} \cos(\frac{k\pi}{5}), \quad S' = \sum_{k=0}^{4} \sin(\frac{k\pi}{5})$$

Exercice 12. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1\overline{z}_2 \neq 1$. On pose $z = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}$.
Montrer que

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = 1 \quad \text{ou} \quad |z_2| = 1$$