Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2021–2022

Analyse1
Fiche de TD 1 : Les nombres réels.

Exercice 1. Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensembles sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}, \quad -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\}, \quad \text{et} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{|x|} > 2\}.$$

Exercice 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3. 1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$.
2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$.
a) En déduire que $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$ est irrationnel.
b) En déduire qu'entre deux rationnels disctincts, il y a au moins un irrationnel.

Exercice 4. I)Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elle existe), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

$$A =]0,2], \qquad B = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad C = \left\{x \in [0,2\pi], \quad \frac{1}{2} \le \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

II)En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et inférieure, montrer que

$$\sup\{-\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\} = 0$$

$$\inf\{1 + \frac{1}{4n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\} = 1.$$

Exercice 5. Trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante

$$E(\sqrt{3x^2+1}) = 4,$$

où $E(x)$ est la partie entière de x.

Exercice 6. I) Soient x et y deux réels.
1) Montrer que

$$E(x) + E(y) \le E(x+y) \le E(x) + E(y) + 1.$$

2) Montrer que pour tout réel x, on a

$$E(x) + E(x + \frac{1}{2}) = E(2x).$$

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}.$$

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) \le f(x) + f(y).$$

Exercice 7. (Facultatif) Démontrer que les réels suivants sont irrationnels.

1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont irrationnels.

2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Exercice 8. (Facultatif) On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ est irrationnel.

Exercice 9. (Facultatif) Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elle existe), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

$$A=\{x\in\mathbb{R}, x^4-x^2-1<0\},\quad B=]1,2[\cap\mathbb{Q},$$

$$C=\{(-1)^n n-\frac{3}{n}-n,\quad n\in\mathbb{N}^*\},\quad D=\{x\in\mathbb{Q},\quad |x-\sqrt{2}|\leq\sqrt{2}\}.$$

Exercice 10. (Facultatif)

Soit E l'ensemble suivant

$$E=\{x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{2-x}>x\}.$$

1) Déterminer l'ensemble E.

2) Déterminer, s'il existe, $\inf(E)$, $\min(E)$, $\sup(E)$ et $\max(E)$.

Exercice 11. (Facultatif) Soit $A=\{x^2+y^2, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\quad \text{et}\quad xy=1\}$.

1)Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.

2) A possède-t-elle une borne supérieure ?

Exercice 12. (Facultatif) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante

$$|2x^2-1|\leq|x+1|$$