Solution TD 4 : Exercices facultatifs

Ex 08 : ① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)} = 1$

② $\lim\limits_{x\to 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Remarquons qu'on a

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{1}{x}-1\right) < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\Rightarrow x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

En utilisant le théorème d'encadrement et puisque $\lim\limits_{x\to 0} x - x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = ?$

On peut utiliser la règle de l'Hôpital. On pose $f(x) = \ln(1+x^2)$ et $g(x) = \sin^2 x$. Alors

$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $g'(x) = 2\sin x \cos x$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\cos x}.$$

On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\right)$ et

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(1+x^2)\cos x} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$ (conjugué)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

⑤ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x+5}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x\left(1+\frac{5}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}\left(\frac{1+\overbrace{5/x\ln x}^{\to 0}}{1+\underbrace{4/x^2}_{\to 0}}\right) = 0$$

⑥ $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ex 09 : 1) Soit $f(t) = e^{1/t^2}$. La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$ avec $x>0$, on trouve qu'il existe $c\in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(c).$$

Sachant que pour $t \neq 0$, $f'(t) = -\frac{2}{t^3} e^{\frac{1}{t^2}}$, alors

$$e^{\frac{1}{(x+1)^2}} - e^{\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}}.$$

Ceci implique que

$$x^3\left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}}.$$

puisque $0 < x \leq c \leq x+1$, alors $x^2 \leq c^2 \leq (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

On sait aussi que $t \to e^t$ est une fonction croissante, alors $e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq e^{\frac{1}{c^2}} \leq e^{\frac{1}{x^2}}$.

D'autre part, on a:

$$\frac{1}{(x+1)^3} \leq \frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{2x^3}{(x+1)^3} \leq \frac{2x^3}{c^3} \leq \frac{2x^3}{x^3}.$$

Ainsi,

$$\frac{2x^3}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}} \leq 2 e^{\frac{1}{x^2}}$$

puisque $\lim_{x \to +\infty} 2e^{\frac{1}{x^2}} = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = 2$, alors

par le théorème d'encadrement, on a:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = 2.$$

II) Soit $f(x) = e^{x/2} - e^{-x/2} - x$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{-x} - \frac{x}{e^{x/2}}\right) = +\infty$

2) On a : $f'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} + \frac{1}{2} e^{-x/2} - 1$ et

$f''(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} - \frac{1}{4} e^{-x/2}$.

3) On a : $e^{x/2} > e^{-x/2}$ qui implique que $\forall x > 0$,

$\frac{1}{4}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right) > 0$.

Donc, $f''(x) > 0$, pour tout $x > 0$. Ainsi, f' est croissante sur $]0, +\infty[$.

puisque $f'(0) = 0$, alors pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$.

Ceci implique que f est croissante.

4) Remarquons que $f(0) = 0$, alors on a le tableau de variation suivant

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Ex10 :

1) Nous remarquons que la fonction f peut s'écrire comme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1-x}{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0 . \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Le seul point qui donne problème à la continuité de f est 0.

On obtient

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-x}{x+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim x^2 - a = -a .$$

Ainsi, f est continue en 0 ssi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Donc $\boxed{a = -1}$

2) Pour étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, il faut que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Donc $a = -1$.

Nous remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Seuls les points 0 et 1 qu'il faut étudier la dérivabilité.

Pour cela,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1-x}{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{x(x+1)} = -2$$

et
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0 .$$

puisque les limites à droite et à gauche du taux de variations sont différentes, alors f n'est pas dérivable en 0.

pour le point 1, on a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

et $$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1-x}{x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.

Ex11 :

1) pour $x<1$, f est un polynôme et donc f est continue.

pour $x \geq 1$, $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.

Il reste le point $x=1$. On a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \quad \text{et}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1).$$

Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On remarque que si $x \neq 1$, alors la fonction f est dérivable.

La dérivabilité en $x=1$.

pour $x<1$, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = -1.$$

pour $x \geq 1$, on a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$

3) Remarquons que f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,2[$ tel que

$$f(2) - f(0) = (2-0)\, f'(c).$$

4) On a $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 3/2$.

par conséquent

$$f(2) - f(0) = 2 f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2 f'(c)$$
$$\Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}.$$

pour $0 < c \leq 1$, on a :

$$f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

pour $1 < c < 2$, on a :

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

puisque $-\sqrt{2} \notin]1,2[$, alors $c = \sqrt{2}$.