Solution TD n3 : Exercices facultatifs.

Exo6 : 1) On remarque que $u_0 = 1 > 0$. Alors par récurrence, supposons que $u_n > 0$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} > 0$.

puisque $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2^{n+1}} < 1$, alors

$$0 < \frac{t}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}.$$

Ceci implique que $\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) > 0$.

Ainsi,

$$U_{n+1} = U_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

2) pour $n \geq 0$,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) < 1 \quad , \text{ pour } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < u_n$. Donc (u_n) est strictement décroissante.

Ainsi, puisque (u_n) est minorée par 0 et strictement décroissante, alors (u_n) converge.

Exo7 : 1) On procède par récurrence.

On a : $u_0 \geq 0$ et donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $u_n \geq 0$ pour un certain rang n et montrons que $U_{n+1} \geq 0$.

On a :

$$U_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} \geq 0 \quad ---- (*)$$

(le numérateur et le dénominateur sont positifs).

Donc, la propriété est vraie.

2) On peut remarqué (d'après (*)) que :

$$U_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2u_n + 1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + \frac{1}{2}}{2u_n + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{2u_n + 1}$$

$$= \frac{\cancel{(2u_n+1)}(u_n + \frac{1}{2})}{\cancel{2u_n+1}} + \frac{\frac{1}{2}}{2u_n + 1}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - (U_n + \tfrac{1}{2}) = \frac{1/2}{2U_n + 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq U_n + \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on peut vérifier par récurrence que

$$U_n \geq U_0 + \frac{n}{2}.$$

3) puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + \frac{n}{2}) = +\infty$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ (car $U_n \geq U_0 + \frac{n}{2}$).

Ex08 : I) pour $n = 1$, on a : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, donc la relation est vraie pour $n = 1$.

Supposons que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie pour le rang $n+1$. On a :

$$1+2+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc, la formule est bien vérifiée.

II) On a : $E(\alpha)\leq\alpha<E(\alpha)+1 \Rightarrow E(\alpha)\leq\alpha \ldots (1)$

D'autre part,

$$E(\alpha)\leq\alpha<E(\alpha)+1 \Rightarrow E(\alpha)-1\leq\alpha-1<E(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha-1<E(\alpha) \ldots (2)$$

De (1) et (2), nous avons

$$\alpha-1<E(\alpha)\leq\alpha \ldots (3)$$

1) D'après (3), on a :

$$\pi-1<E(\pi)\leq\pi$$
$$2\pi-1<E(2\pi)\leq 2\pi$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$n\pi-1<E(n\pi)\leq n\pi$$

La somme terme à terme implique que

$$(\pi-1)+(2\pi-1)+\cdots+(n\pi-1)<E(\pi)+E(2\pi)+\cdots+E(n\pi)\leq\pi+2\pi+\cdots+n\pi$$

$$\pi(1+2+\cdots+n)-n<E(\pi)+\cdots+E(n\pi)\leq\pi(1+2+\cdots+n).$$

$$\Rightarrow \pi\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-n<E(\pi)+\cdots+E(n\pi)\leq\pi\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(n+1)}{2n}-\frac{1}{n}<\frac{E(\pi)+\cdots+E(n\pi)}{n^2}\leq\frac{\pi(n+1)}{2n}.$$

Ainsi, $\dfrac{\pi(n+1)-2}{2n} < u_n \leq \dfrac{\pi(n+1)}{2n}$

2) puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi(n+1)-2}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi(n+1)}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, alors

par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Exo 9,

① $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite classique)

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\frac{1}{2}\ln n}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\,\dfrac{\ln\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+n^2+1}{-n^3+n+1} = \lim \dfrac{2n^3}{-n^3}\dfrac{\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = -2$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n^2+1} = 0$ car $\dfrac{-1}{n^2+1} \leq \dfrac{\sin n}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

⑥ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1-\cos(n\pi)}{n} = \lim \left(2+\dfrac{1}{n} - \dfrac{\cos(n\pi)}{n}\right) = 2$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n} = 0$.

Ex 10 :

1) pour $n=0$, on a : $u_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.

Supposons que $u_n > 0$, alors $\dfrac{u_n+2}{3u_n+2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang n.

2) On a : $x = \dfrac{\cancel{3}x+2}{3x+2} \iff 3x^2 + x - 2 = 0$

$\iff x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = -1$.

Ainsi, on a : $a = \dfrac{2}{3}$.

3) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0$, $|u_n - a| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

pour $n=0$, on a :

$|u_0 - a| = \left|1 - \dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2^0}$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.

Supposons que $|u_n - a| \leq \dfrac{1}{2^n}$ est vraie et démontrons que $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

On a : $|u_{n+1} - a| = \left|\dfrac{u_n+2}{3u_n+2} - \dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{\left|u_n - \frac{2}{3}\right|}{3u_n+2}$

$\leq \dfrac{\left|u_n - \frac{2}{3}\right|}{2} \leq \dfrac{1/2^n}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang $n+1$.

Donc, $\forall n \geq 0$, on a : $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$.

Ceci implique que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$.

Ex 11 :

a) pour $n = 0$, $U_0 > 0$ et $V_0 > 0$ avec $U_0 > V_0$.

Supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$, alors

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} > 0 \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} > 0.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang n.

D'autre part, remarquons que

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Donc, si $a = \sqrt{U_n}$ et $b = \sqrt{V_n}$, on a alors

$$V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \leq U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

b) puisque $U_n \geq V_n$, alors

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{U_n + U_n}{2} \leq U_n.$$

$\Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

On a aussi,

$$V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \geq \sqrt{V_n V_n} \geq V_n$$

$\Rightarrow (V_n)$ est croissante.

De plus, on a :

$$U_0 \geq U_1 \geq \dots \geq U_{n-1} \geq U_n \geq V_n \geq V_{n-1} \geq \dots \geq V_0$$

Donc, $V_n \leq U_0$ et $U_n \geq V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) D'après le cours, puisque (U_n) est décroissante et minorée et (V_n) est croissante et majorée, alors (U_n) et (V_n) convergent

d) On a : $W_n = U_n - V_n \geq 0$ et

$$W_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - V_{n+1} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - V_n$$

$$\leq \frac{U_n - V_n}{2} \leq \frac{W_n}{2}.$$

par récurrence, on peut montrer que

$$0 \leq W_n \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} W_n = 0$$

Maintenant, posons $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim_{n \to +\infty} V_n$, alors

$$0 = \lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n - \lim_{n \to +\infty} V_n$$

$$= l - l' \Rightarrow l = l'$$