Solution TD n°1 : Exercices facultatifs :

Exo 7 : 1) Supposons que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est rationnel. Alors

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$ et donc

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est aussi un rationnel. Ainsi,

$$2\sqrt{a} = (\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} \in \mathbb{Q},$$

et ceci est une contradiction.

2) Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est un rationnel qu'on pose $r = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Alors

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r-\sqrt{5} \Rightarrow 5+2\sqrt{6} = r^2+5-2r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow r^2 = 2\sqrt{6}+2r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{2} = \sqrt{6}+r\sqrt{5} \in \mathbb{Q}.$$

Multiplions par le conjugué, on obtient

$$\frac{(\sqrt{6}+r\sqrt{5})(\sqrt{6}-r\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-r\sqrt{5})} = \frac{6-5r^2}{\sqrt{6}-r\sqrt{5}} \Rightarrow r\sqrt{5}-\sqrt{6} = \frac{5r^2-6}{r\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow \sqrt{6}$ est rationnel et ceci est une contradiction.

Exo8 : 1) Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est rationnel càd

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*.$$

On a :
$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$ qui implique que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{3} + 3.$$

Ainsi,
$$\sqrt{3} = \frac{-q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2} - 1\right).$$

Ceci montre que $\sqrt{3}$ est rationnel et ceci est une contradiction. Par conséquent, $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2) Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 2+3+2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} + 6 - \frac{2p}{q}\sqrt{6}$$

impliquant que

$$\sqrt{6} = \frac{1 + \frac{p^2}{q^2}}{2 + \frac{2p}{q}} \in \mathbb{Q},$$

et ceci est une contradiction.

Exo 09 : 1) $A = \{x \in \mathbb{R}, \ x^4 - x^2 - 1 < 0\}$.

On pose $y = x^2$, on obtient:

$$A = \{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 - y - 1 < 0 \}.$$

$y^2 - y - 1 = 0$ implique qu'il y a deux solutions

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donc, $y^2 - y - 1 = (y - y_1)(y - y_2) < 0$ si

$y \in [0, y_2[$. Ainsi,

$$x \in]-\sqrt{y_2}, +\sqrt{y_2}[:= A.$$

Donc, l'ensemble des majorants est $[\sqrt{y_2}, +\infty[$
et des minorants $]-\infty, -\sqrt{y_2}]$.

2) $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$.

Remarquons que $B \subset]1,2[$ (B est borné) et
donc sup et Inf existent dans $\mathbb{R}$. En plus, $B \neq \emptyset$
car $\frac{3}{2} \in B$. (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

• Montrons que $\sup B = 2$.

On veut montrer que

$$\begin{cases} \forall x \in B, & x \leq 2 \quad \text{-----} (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B, & x > 2 - \varepsilon \quad \text{----} (2) \end{cases}$$

(1) c'est évident.

(2) Soit $\varepsilon > 0$.

<u>1er cas :</u> Si $\varepsilon \geq 1 \Rightarrow 2-\varepsilon \leq 1$ et donc tout élément de $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$ vérifie (2). En particulier $x = \frac{3}{2} \in]1,2[\cap \mathbb{Q}$.

Donc, $\forall \varepsilon \geq 1, \ \exists x \left(=\frac{3}{2}\right) \in \mathbb{Q}, \ x > 2-\varepsilon$.

<u>2ème cas :</u> Si $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow 1 < 2-\varepsilon < 2$.

puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors on peut toujours trouver $x_0 \in \mathbb{Q} \cap]2-\varepsilon, 2[$. Donc, $\exists x_0 \in B$,

$x_0 > 2-\varepsilon$ et ceci vérifie (2).

En plus, $2 \notin B$ et donc B n'a pas de maximum.

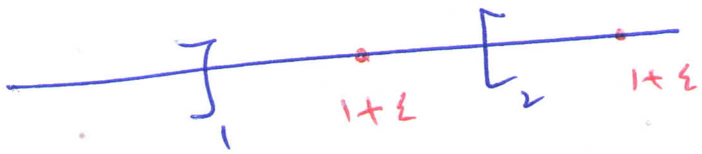
• Montrons que $\operatorname{Inf} B = 1$.

On veut montrer que

$$\begin{cases} \forall x \in B, & x \geq 1 \quad \text{--- (1)} \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in B, & x < 1+\varepsilon \quad \text{--- (2)} \end{cases}$$

(1) C'est évident.

(2) Soit $\varepsilon > 0$



<u>1er cas :</u> Si $\varepsilon \geq 1$
$\Rightarrow 1+\varepsilon \geq 2$. Donc tout élément de $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$ vérifie (2) et on peut choisir $x = \frac{3}{2} \in B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$. Donc

$\forall \varepsilon \geq 1, \ \exists x \left(=\frac{3}{2}\right) \in B, \ x < 1+\varepsilon$.

$2^{ème}$ cas : Si $0 < \varepsilon < 1$, alors $1 < 1+\varepsilon < 2$,

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique qu'il existe $x_0 \in B$ telle que $x_0 < 1+\varepsilon$ et donc (2) est vérifiée.

En plus $1 \notin B$ et donc B n'a pas de minimum.

3) $C = \left\{ (-1)^n n - \frac{3}{n} - n \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

posons $x_n = (-1)^n n - \frac{3}{n} - n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x_{2n} = \frac{-3}{2n} \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = -2(2n+1) - \frac{3}{2n+1}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \leq 0.$$

Ainsi, C est majorée par 0 et puisque $0 \notin C$, donc C n'a pas de maximum.

D'autre part, nous remarquons que C n'est pas minorée car $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} -2(2n+1) - \frac{3}{2n+1} = -\infty$.

Donc, il n'y a pas de borne inférieure, ni de minimum.

4) $D = \left\{ x \in \mathbb{Q} \ , \ |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \right\}$

$$|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \implies 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}.$$

Donc $D = [0, 2\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \subset [0, 2\sqrt{2}]$.

$D \neq \emptyset$ car $0 \in D$, D est borné dans $\mathbb{R}$ et donc $\sup$ et $\inf$ existent dans $\mathbb{R}$.

- En utilisant la caractérisation de la borne supérieure, on montre que $\sup D = 2\sqrt{2}$ et puisque $2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, alors $2\sqrt{2} \notin D$ et donc D n'a pas de maximum.

- 0 est un minorant de D car

$$\forall x \in D, \quad x \in [0, 2\sqrt{2}]$$
$$\Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}.$$

De plus, $0 \in D$ $\quad (0 \in D$ et $0 \in [0, 2\sqrt{2}])$

Donc, $\quad 0 = \operatorname{Inf} D = \operatorname{Min} D.$

Ex 10 : On a $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2-x} > x\}$.

Il y a 2 situations à analyser.

1) $\begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ 2-x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} x \geq 0 \\ -2 < x < 1. \end{cases}$

Ainsi, $\quad 0 \leq x < 1$

2) $\begin{cases} x < 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x < 0.$

Alors, on a $\quad E =]-\infty, 0[\cup [0, 1[=]-\infty, 1[.$

2) $\operatorname{Inf}(E)$ n'existe pas , $\min(E)$ n'existe pas.
$\sup(E) = 1$ et $\operatorname{Max}(E)$ n'existe pas.

EXM: $A \neq \emptyset$ car $2 \in A$. ($x = y = 1$).

1) On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \text{-----} (*)$$

pour tout $r \in A$, $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$r = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad xy = 1 .$$

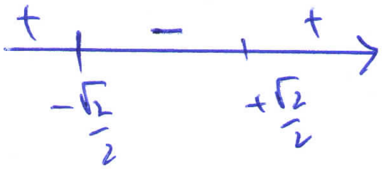
$(*) \Rightarrow \forall r \in A , \; r \geq 2$.

Donc, A est minorée et possède une borne inférieure.
De plus , $\forall r \in A$, $r \geq 2 \Rightarrow \operatorname{Inf} A \geq 2$.
Or $2 \in A$ et donc $\inf A = 2 = \operatorname{Min} A$.

2) Montrons que A n'est pas majorée , donc n'admet pas de borne supérieure.
Supposons par l'absurde que A admet une borne supérieure qu'on notera M. Alors
pour tout $r = x^2 + \frac{1}{x^2} \in A$, $r \leq M$ ---(**)

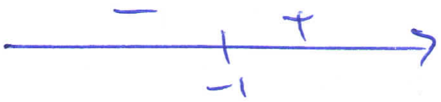
pour $x = \sqrt{M}$, on a : $r = M + \frac{1}{M} \in A$. Donc $(**) \Rightarrow r = M + \frac{1}{M} \leq M$ et
ceci est une contradiction. Donc A n'a pas de borne supérieure.

Ex 12 : $2x^2-1=0 \iff x^2=\frac{1}{2} \iff x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x+1=0$

$\iff x=-1$

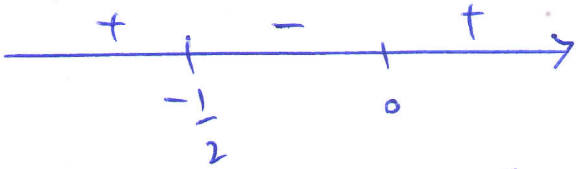


On peut résumer les situations possibles dans un tableau.

x	$-\infty$ … -1	-1 … $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ … $+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$ … $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$2x^2-1$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\lvert 2x^2-1\rvert$	$2x^2-1$	$2x^2-1$	$-2x^2+1$	$2x^2-1$
$\lvert 2x^2-1\rvert \le \lvert x+1\rvert$	$2x^2+x\le 0$	$2x^2-x-2 \le 0$	$2x^2+x \ge 0$	$2x^2-x-2 \le 0$

1) $2x^2+x=0 \iff x(2x+1)=0$

$\iff x=0$ ou $x=-\frac{1}{2}$

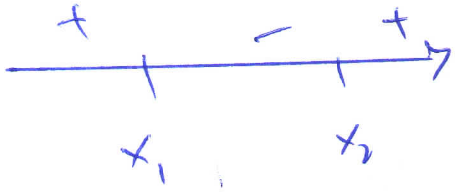


et $\{2x^2+x\le 0,\ x\in\,]-\infty,-1[\,\}=\emptyset$

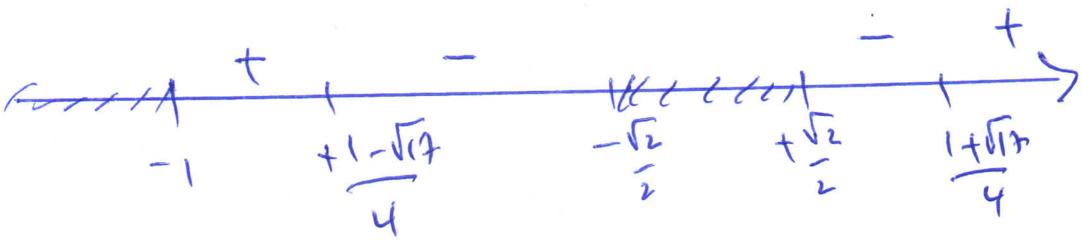
$\{2x^2+x\ge 0,\ x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}]\}=[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}]\cup[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

2) $2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$ Il y a 2 solutions

$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.



En suivant le tableau, on a :



Donc

$\left\{ 2x^2 - x - 2 \leq 0 \,,\, x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\right\}$

$= \left[\frac{1-\sqrt{17}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$.