Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1   Série de TD 03 " Les applications".
1ère Année MI 2021-2022.

Exercice 01: Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

(1) g est-elle injective? surjective?

(2) A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

(3) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses?

(a) $f(\{0\}) = \{5\}$, (b) $0 \in f^{-1}(\{5\})$, (c) $f^{-1}(5) = 0$,

(d) $g^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ et (e) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

(4) Déterminer $f([0,1])$, $f^{-1}([5,7])$, $f(\mathbb{R})$, $g([-4,-1])$, $g([-2,-1])$ et $g([-4,-1] \cap [-2,-1])$.

(5) Déterminer $g^{-1}([-4,-1])$, $g^{-1}([0,4[)$ et $g^{-1}([1,+\infty[)$.

Solution :

(1) g n'est pas injective car :

$$-1 \neq 1 \text{ et } g(-1) = g(1).$$

Elle n'est pas surjective car :

$$\text{pour } y = -2; \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq -2 \ (g(x) \text{ est toujours positive}).$$

(2)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{2}{x^2+1} + 5,$$

et

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = \frac{1}{(2x+5)^2+1},$$

ce qui implique que : $f \circ g \neq g \circ f$.

(3) Sachant que :

$$f'(x) = 3 > 0,$$

donc f est strictement croissante d'où l'injectivité de f.
d'autre part :

$$y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2},$$

donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}; \exists x = \frac{y-5}{2} \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) = y,$$

donc f est surjective, donc elle est bijective, d'où f^{-1} existe.
(a) $f(\{0\}) = \{5\}$ est vraie car : $f(0) = 5$.
(b) $0 \in f^{-1}(\{5\})$ est vraie car : $f(0) = 5$.
(c) $f^{-1}(5) = 0$ est vraie car : f est bijective et $f(0) = 5$.
(d) $g^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ est vraie car : $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 1$.
(e) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ est vraie car : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$.

(4) f est une fonction croissante et g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^{-)}$donc :

(i) $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [5,7]$.
(ii) $f^{-1}([5,7]) = \left[f^{-1}(5), f^{-1}(7)\right] = [0,1]$.
(iii) $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$.

(iv) $g([-4,-1]) = [g(-4), g(-1)] = \left[\frac{1}{17}, \frac{1}{2}\right]$.
(v) $g([-2,-1]) = [g(-2), g(-1)] = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$.
(vi) $g([-4,-1] \cap [-2,-1]) = g([-2,-1]) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$.

(5) (i) $g^{-1}([-4,-1]) = \emptyset$ car: $g(x) > 0$.

(ii) $g^{-1}([0,4[) = g^{-1}(]0,1[) = \mathbb{R}$.
(iii) $g^{-1}([1,+\infty[) = g^{-1}\{1\} = \{0\}$,car: $0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 02:

(1) Montrer que f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ est bijective et déterminer sa réciproque.}$$

(2) Soit f de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$ définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Montrer que f est une application et qu'elle est bijective.

b) Définir alors l'application réciproque.

Solution :

(1) (a) f est elle injective ?

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} (x_1, x_2 \text{ ont le même signe}),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2, \\ \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \leq 0, \text{ne convient pas car } x_1, x_2 \text{ ont le même signe,} \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \geq 0, \text{ne convient pas car } x_1, x_2 \text{ ont le même signe,} \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2, \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ est injective.

(b) f est elle surjective ?

Montrons que :

$$\forall y \in \left]-1, 1\right[, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) = y.$$

(i) Si $y \in \left]-1, 0\right[\Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} < 0$ qui existe si : $y \in \left]-1, 0\right[$.

(ii) Si $y \in \left[0, 1\right[\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} < 0$ qui existe si : $y \in \left[0, 1\right[$.

conclusion : f est une application bijective car elle est injective et surjective avec :

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \frac{y}{1-y} \text{ si } y \in \left[0, 1\right[, \\ \frac{y}{1+y} \text{ si } y \in \left]-1, 0\right[. \end{cases} \end{aligned}$$

(1) Montrons que f est une application :

(i) f est une application $\Leftrightarrow \forall x \in \left[0, 1\right[, \exists y \in \left[1, +\infty\right[$ tel que : $f(x) = y$?

$$f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0, \text{ car } x \in \left[0, 1\right[,$$

donc f est croissante, de plus on a :

$$f(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty,$$

ce qui implique que $f(\left[0, 1\right[) = \left[1, +\infty\right[$, d'où f est une application de $\left[0, 1\right[$ dans$\left[1, +\infty\right[$.

(ii) Montrons que f est bijective.

* f est injective car :

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \quad &\in \quad \left[0, 1\right[, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}, \\ &\Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ car } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

* f est surjective car :

$$\begin{aligned}
\forall y \quad &\in \quad [1,+\infty[\,, \exists x \in [0,1[\text{ tel que : } f(x) = y, \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = y^2, \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{y^2} = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-1}{y^2},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \in [0,1[\,, \text{ car } y \geq 1. \qquad (1)$$

Conclusion : f est bijective car elle est injective et surjective.

(2) Puisque f est bijective alors l'application réciproque d'après (1) est donnée par :

$$\begin{aligned}
f^{-1} \quad &: \quad [1,+\infty[\to [0,1[\\
y \quad &\mapsto \quad f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.
\end{aligned}$$

Exercice 03: Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

(1) Vérifier que pour tout réel a non nul on a: $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$.
l'application h est-elle injective? Justifier.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$ par $f(x) = h(x)$.

a) Montrer que f est injective.

b) Vérifier que: $\forall x \in I, f(x) \leq 2$.

c) Montrer que f est une bijection de I sur $]0,2]$ et trouver $f^{-1}(x)$.

Solution :

(1) a) Vérifions que pour tout réel a non nul on a : $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$\begin{aligned}
h(a) - h\left(\frac{1}{a}\right) &= \frac{4a}{a^2+1} - \frac{4\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1} \\
&= \frac{4a}{a^2+1} - \frac{\frac{4}{a}}{\frac{1+a^2}{a^2}} \\
&= \frac{4a}{a^2+1} - \frac{4a}{a^2+1} = 0 \Rightarrow h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right).
\end{aligned}$$

b) L'application h est-elle injective ?

h n'est pas injective car pour :

$$x_1 = 2 \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}, x_1 \neq x_2,$$

mais d'après (1), $h(2) = h\left(\frac{1}{2}\right).$

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x).$

(a) Montrons que f est injective c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1} \\
&\Rightarrow 4x_1\left(x_2^2+1\right) = 4x_2\left(x_1^2+1\right) \\
&\Rightarrow x_1\left(x_2^2+1\right) = x_2\left(x_1^2+1\right) \\
&\Rightarrow x_1x_2x_2 - x_2x_1x_1 + x_1 - x_2 = 0 \\
&\Rightarrow x_1x_2(x_2 - x_1) + (x_1 - x_2) = 0 \\
&\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0, \\
&\Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ ou } \left(x_1 = \frac{1}{x_2}\right),
\end{aligned}$$

mais $x_1 = \frac{1}{x_2}$ est un cas qui n'est pas possible pour $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ sauf si $x_1 = x_2 = 1.$

Conclusion : f est injective.

(b) Vérifions que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq 2.$

Soit $x \in I,$

$$\begin{aligned}
f(x) - 2 &= \frac{4x}{x^2+1} - 2 = \frac{4x - 2(x^2+1)}{x^2+1} \\
&= -2\frac{\left(x^2 - 2x + 1\right)}{x^2+1} \\
&= \frac{-2(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2.
\end{aligned}$$

(c) Montrons que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouvons $f^{-1}(x).$

f est surjective car :

$$\forall y \in]0, 2], \exists x \in [1, +\infty[\text{ tel que : } f(x) = y.$$

En effet :

$$\frac{4x}{x^2+1} = y \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0,$$

donc :

$$\triangle = 16 - 4y^2 \geq 0 \text{ car : } y \in \left]0, 2\right],$$

ce qui implique que :

$$x_1 = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$$

ou

$$x_2 = \left(2 - 2\sqrt{4 - y^2}\right) \leq 0 \text{ une solution qui ne convient pas,}$$

$\Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$, qui existe $\forall y \in \left]0, 2\right]$.
Conclusion : f est bijective car elle est injective et surjective.
De plus l'application réciproque est :

$$\begin{array}{ccl} f^{-1} & : & \left]0, 2\right] \rightarrow \left[1, +\infty\right[\\ x & \mapsto & f^{-1}(x) = 2 + 2\sqrt{4 - x^2}. \end{array}$$

Exercice 04: Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit f définie comme suit:

$$\begin{array}{ccl} f & : & A \rightarrow B \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{ax + c}{bx + d}. \end{array}$$

Comment doit-on choisir les plus grands inconnus A et B et les autres constantes pour que f soit :

(1) une application? (2) injective? (3) surjective? et (4) bijective?
Solution : Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit f définie comme suit :

$$\begin{array}{ccl} f & : & A \rightarrow B \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{ax + c}{bx + d}. \end{array}$$

(1) f est une application si $\forall x \in A, \exists y \in B$ tel que : $y = f(x)$.

On remarque que $f(x)$ existe pour tout $x \neq -\frac{d}{b} \Rightarrow A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}$.

(2) f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\begin{array}{ccl} f(x_1) & = & f(x_2) \Rightarrow \dfrac{ax_1 + c}{bx_1 + d} = \dfrac{ax_2 + c}{bx_2 + d} \\ & \Rightarrow & (ax_1 + c)(bx_2 + d) = (bx_1 + d)(ax_2 + c), \\ & \Rightarrow & abx_1x_2 + adx_1 + cbx_2 + cd = abx_1x_2 + bcx_1 + dax_2 + cd, \\ & \Rightarrow & adx_1 + cbx_2 = bcx_1 + dax_2, \\ & \Rightarrow & (ad - bc)x_1 = (ad - bc)x_2, \end{array}$$

donc pour que $x_1 = x_2$ il suffit que : $(ad - bc) \neq 0$.
Conclusion : pour que f est injective il suffit que :
$(ad - bc) \neq 0$ et $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}$(la condition de l'application).

(3) f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A$ tel que : $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \Leftrightarrow \frac{ax+c}{bx+d} = y \\ &\Leftrightarrow ax + c = (bx+d)\, y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{dy - c}{a - by} \text{ qui existe si } y \neq \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Donc f est surjective si et seulement si $y \neq \frac{a}{b}$ c'est-à-dire :
$B = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}$ et $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}$(la condition de l'application).

(4) f soit une application bijective $\Leftrightarrow$ f est une application injective et surjective donc les conditions sont d'après les premières questions :

$$A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}, (ad - bc) \neq 0 \text{ et } B = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}.$$

Exercice 05: Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que: $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.

(2) Montrer que: $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

(3) f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Solution :

(1) Montrons que : $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.

Supposons par l'absurde que f n'est pas injective, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \exists x_1, x_2 &\in E \text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)], \text{car } g \text{ est une application} \\ &\Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \text{ avec } x_1 \neq x_2, \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ n'est pas injective. (contradiction), ce qui implique que f est injective.

(2) Montrons que : $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

$$\begin{aligned} &g \circ f \text{ est surjective avec } g \circ f : E \to G, \\ &\Rightarrow \forall z \in G, \exists x \in E \text{ tel que : } g \circ f(x) = z, \\ &\Rightarrow g[f(x)] = z \Rightarrow \exists y = f(x) \in F, \end{aligned}$$

car f est une application d'où : $g(y) = z$,alors g est surjective.

(3) Si f et g sont bijectives. Montrons alors que : $g \circ f$ est injective ensuite qu'elle est surjective ?

(a) Pour l'injectivité :

Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$ alors $f(x_1) \neq f(x_2)$ car f est injective, donc :

$$g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)] \text{ car } g \text{ estinjective,}$$

alors $g \circ f$ est injective.

(b) Pour la surjectivité :

On a : $\forall z \in G, \exists y \in F$ tel que : $g(y) = z$ car g est surjective, mais :

$$\exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y, \text{ car } f \text{ est surjective,}$$

d'où :

$$\begin{aligned} g(y) &= z \Rightarrow g[f\ \ (x)] = z, \text{ car } f \text{ est surjective,} \\ &\Rightarrow \forall z \in G, \exists x \in E, (g \circ f)(x) = z, \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est surjective.
Conclusion : $g \circ f$ est bijective car elle est injective et surjective.
De plus sachant que si on a :

$$h \circ k = k \circ h = Id \Rightarrow k = h^{-1}. (Id: \text{ application identité}) \tag{2}$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f \\ &= f^{-1} \circ Id \circ f = f^{-1} \circ f = Id, \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) &= g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} \\ &= g \circ Id \circ g^{-1} g \circ g^{-1} = Id. \end{aligned}$$

Conclusion : D'après (2) :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$