1.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

Faculté des sciences *** 1ère Année MI 2021-2022.

Module : Algèbre 1 / 2ème série de TD.

Exercice 01: Compléter les diagrammes suivants pour qu'une relation binaire $\Re$, sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, soit:

(1) Symétrique, transitive mais non réflexive.

$\Re$	1	2	3	4
1				
2		+	+	
3			+	+
4				+

(2) Réflexive, non symétrique et non transitive.

$\Re$	1	2	3	4
1			+	
2	+		+	
3				+
4		+		

(3) Une relation d'équivalence, puis donner la classe d'équivalence de chaque élément de A .

$\Re$	1	2	3	4
1			+	
2		+		
3		+		
4	+			+

Exercice 02: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$aSb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b.$$

(1) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(2) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m.

Exercice 03: Soit $\Re$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par:

$$(x,y)\,\Re\,(x',y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl\left((1,2)\right)$ et $cl\left((-1,2)\right)$.

Exercice 04: Soient E un ensemble non vide et F une partie non vide de E.

Dans $P(E)$, ensemble des parties de E, on définit la relation R par:

$$\forall (A,B) \in P(E) \times P(E), ARB \Leftrightarrow A \cap F = B \cap F.$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $Cl(\emptyset)$, classe d'équivalence de l'ensemble vide.

(3) A-t-on: $E \in Cl(\emptyset)$? Justifier.

(4) Déterminer $Cl(E)$. En déduire $Cl(F)$.

Exercice 05: Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^n = y.$$

(1) Cet ordre est-il total ?

(2) Soit l'ensemble $A = \{1,4,8\}$. Déterminer s'ils existent, $\max A$ et $\min A$ pour l'ordre Φ.

Exercice 06: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\leq$ définie par:

$$(x,y) \leq (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

(2) Préciser deux minorants, deux majorants, bornes inférieure et supérieure de la partie:

$$A = \{(1,2),(3,1)\}.$$

(3) La partie A possède-t-elle un plus grand élément? Un plus petit élément?.

Exercice 07: Soit E l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x]$ avec $x \in \mathbb{R}$,

c'est-à-dire: $E = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. On définit dans E la relation $\Re$ par:

$$\forall X, Y \in E, X\Re Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

(2) L'ordre est-il total? Justifier.

(3) Soit $F \subset E$ défini par: $F = \{]-\infty, x], x \leq 5\}$.

a) Déterminer l'ensemble des majorants de F.

b) Déterminer, s'ils existent, $\sup F$ et le plus grand élément de F.

Le corrigé

Exercice 01 : Compléter les diagrames suivants pour qu'une relation binaire $\Re$, sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, soit :

1) Symétrique, transitive mais non réflexive.

$\Re$	1	2	3	4
1				
2		+	+	+
3		+	+	+
4		+	+	+

2) Réflexive, non symétrique et non transitive.$4\Re 3$ et $3\Re 2$ mais $4\not\Re 2$

$\Re$	1	2	3	4
1	+		+	
2	+	+	+	
3			+	+
4		+		+

3) Une relation d'équivalence.

$\Re$	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2	+	+	+	+
3	+	+	+	+
4	+	+	+	+

La réflexivité : $1\Re 1, 3\Re 3$.

La symétrie : $1\Re 4 \Rightarrow 4\Re 1, 2\Re 3 \Rightarrow 3\Re 2$.

La transitivité : $1\Re 3$ et $3\Re 2 \Rightarrow 1\Re 2 \Rightarrow 2\Re 1$ (la symétrie).

$2\Re 1$ et $1\Re 4 \Rightarrow 2\Re 4 \Rightarrow 4\Re 2$ (la symétrie).

$2\Re 3 \Rightarrow 3\Re 2$ (la symétrie).

$3\Re 1$ et $1\Re 4 \Rightarrow 3\Re 4 \Rightarrow 4\Re 3$ (la symétrie).

$$cl(1))cl(2) = cl(3) = cl(4) = \{1, 2, 3, 4\}.$$
$$E/\Re = \{cl(1)\}.$$

Exercice 02 : Soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$aSb \Longleftrightarrow a^3 - b^3 = a - b.$$

(1) Montrons que S est une relation d'équivalence.

a) S est-elle réflexive?

S est réflexive $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, aSa$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, 0 = 0 \Rightarrow a^3 - a^3 = a - a \Rightarrow aSa,$$

alors S est réflexive.

b) S est-elle symétrique?

S est symétrique $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}$, $aSb \Rightarrow bSa$?

$$\begin{array}{rcl} \forall a, b & \in & \mathbb{R}, aSb \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \\ & \Rightarrow & \left(a^3 - b^3\right)(-1) = (a - b)(-1) \\ & \Rightarrow & b^3 - a^3 = b - a \\ & \Rightarrow & bSa. \end{array}$$

alors S est symétrique.

c) S est-elle transitive?

S est transitive $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, aSb et $bSc \Rightarrow aSc$?

$$\begin{array}{rcl} \forall a, b, c & \in & \mathbb{R}, aSb \text{ et } bSc \\ & \Rightarrow & a^3 - b^3 = a - b \text{ et } \quad b^3 - c^3 = b - c \\ & & \text{La somme des deux équations} \\ & \Rightarrow & a^3 - c^3 = a - c \Rightarrow aSc, \end{array}$$

alors S est transitive.

Conclusion : Puisque S est réflexive, symétrique et transitive alors c'est une relation d'équivalence.

2) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m (noté $cl(m)$ ou $\dot{m}$).

$$cl(m) = \{a \in \mathbb{R}, aSm\}.$$

Les inconnus sont les a?

$$\begin{array}{rcl} aSm & \Leftrightarrow & \left(a^3 - m^3\right) = (a - m) \\ & \Leftrightarrow & (a - m) P_2 = (a - m) \text{ car (} m \text{ est une solution),} \end{array}$$

par la division euclidienne on a :

$$\begin{array}{ll} a^3 - m^3 & a - m \\ -a^3 + ma^2 & a^2 + ma + m^2 \\ ma^2 - m^3 & \\ -ma^2 + m^2 a & \\ m^2 a - m^3 & \\ -m^2 a + m^3 & \\ 0 & \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (a-m) P_2 &= (a-m) \\ &\Leftrightarrow (a-m)\left(a^2 + ma + m^2\right) = (a-m), \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{cases} a - m = 0 \\ \text{ou} \\ a - m \neq 0 \Rightarrow a^2 + ma + m^2 = 1 \end{cases}$$

donc :

$$a = m.$$

ou bien :

$$a^2 + ma + m^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + ma + m^2 - 1 = 0.$$

$$\triangle = m^2 - 4(1)\left(m^2 - 1\right) = 4 - 3m^2.$$

Donc on a trois cas :

1er cas : Si

$$\triangle = 0 \Rightarrow 4 - 3m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On a 2 éléments dans la classe de m.

2ème cas : Si

$$\triangle < 0 \Rightarrow m \in \left]-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right[.$$

On a un éléments dans la classe de m qui est m.

3 ème cas : Si

$$\triangle > 0 \Rightarrow m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[.$$

On a 3 éléments dans la classe de m.

Exercice 03 : Soit $\Re$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$(x, y) \Re (x', y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

a) $\Re$ est-elle réflexive?

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; (x,y)\Re(x,y)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$;

$$\begin{aligned} xy - xy &= 0 \\ &\Rightarrow (x,y)\Re(x,y). \end{aligned}$$

alors $\Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est-elle symétrique?

$\Re$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$;

$$(x,y)\Re(x',y') \Rightarrow (x',y')\Re(x,y)?$$

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} (x,y)\Re(x',y') &\Rightarrow xy' - x'y = 0 \\ &\Rightarrow (-1)(xy' - x'y) = 0 \\ &\Rightarrow x'y - xy' = 0 \\ &\Rightarrow (x',y')\Re(x,y), \end{aligned}$$

alors $\Re$ est symétrique.

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$;

$$(x,y)\Re(x',y') \text{ et } (x',y')\Re(x'',y'') \Rightarrow (x,y)\Re(x'',y'').$$

Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} & (x,y)\Re(x',y') \quad \text{et} \quad (x',y')\Re(x'',y'') \\ \Rightarrow \quad & xy' - x'y = 0 \text{ et } x'y'' - x''y' = 0 \\ \Rightarrow \quad & \end{aligned}$$

$$xy' - x'y = 0 \Rightarrow x' = \frac{xy'}{y}\,(y \neq 0),$$

donc

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= 0 \Rightarrow \left(\frac{xy'}{y}\right) y'' - x''y' = 0 \\ &\Rightarrow \frac{xy'y'' - x''y'y}{y} = 0 \\ &\Rightarrow xy'y'' - x''y'y = 0 \\ &\Rightarrow y'(xy'' - x''y) = 0 \\ &\Rightarrow xy'' - x''y = 0, \text{ car } y' \neq 0 \\ &\Rightarrow (x,y)\Re(x'',y''), \end{aligned}$$

alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : Puisque $\Re$ est réflexive, symétrique et transitive alors c'est une relation d'équivalence.

(2) Déterminons $cl((1,2))$ et $cl((-1,2))$.

$$cl((1,2)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; (x,y)\,\Re(1,2)\}.$$
$$(x,y)\Re\,(x',y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

$$\begin{aligned} (x,y)\,\Re(1,2) &\Leftrightarrow x \times 2 - 1 \times y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x, \end{aligned}$$

alors :

$$cl((1,2)) = \{(x,2x)\,, x \in \mathbb{N}^*\}.$$

ou écrire :

$$cl((1,2)) = \left\{\left(\frac{y}{2}, y\right), y = 2k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

D'autre part :

$$cl((-1,2)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; (x,y)\,\Re(-1,2)\}.$$
$$(x,y)\Re\,(x',y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

$$\begin{aligned} (x,y)\,\Re(-1,2) &\Leftrightarrow x \times 2 - (-1) \times y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -2x, \end{aligned}$$

alors :

$$cl((-1,2)) = \left\{(x,-2x)\,, x \in \mathbb{Z}_-^*\right\}.$$

ou écrire :

$$cl((-1,2)) = \left\{\left(-\frac{y}{2}, y\right), y = 2k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 04 : Soient E un ensemble non vide et F une partie non vide de E.
Dans $P(E)$, ensemble des parties de E, on définit la relation $\Re$ par :

$$\forall\,(A,B) \in P\,(E) \times P\,(E)\,, A\Re B \Leftrightarrow A \cap F = B \cap F.$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

a) $\Re$ est-elle réflexive?

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall A \in P\,(E)\,; A\Re A.$

Soit $A \in P\,(E)\,;$

$$\begin{aligned} A \cap F &= A \cap F \\ &\Rightarrow A\Re A. \end{aligned}$$

alors $\Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est-elle symétrique?

$\Re$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall A, B \in P(E)$;

$$A\Re B \Rightarrow B\Re A?$$

Soient $A, B \in P(E)$:

$$\begin{aligned} A\Re B &\Rightarrow A\cap F = B\cap F \\ &\Rightarrow B\cap F = A\cap F \\ &\Rightarrow B\Re A, \end{aligned}$$

alors $\Re$ est symétrique.

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall A, B, C \in P(E)$;

$$A\Re B \text{ et } B\Re C \Rightarrow A\Re C.$$

Soient $A, B, C \in P(E)$:

$$\begin{aligned} & A\Re B \text{ et } B\Re C \\ \Rightarrow\ & A\cap F = B\cap F \text{ et } B\cap F = C\cap F \\ \Rightarrow\ & A\cap F = C\cap F \\ \Rightarrow\ & A\Re C, \end{aligned}$$

alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : Puisque $\Re$ est réflexive, symétrique et transitive alors c'est une relation d'équivalence.

(2) Déterminons $cl(\varnothing)$.

$$cl(\varnothing) = \{A \in P(E), A\Re\varnothing\}.$$

$$A\Re B \Leftrightarrow A\cap F = B\cap F$$

$$\begin{aligned} A\Re\varnothing &\Leftrightarrow A\cap F = \varnothing\cap F \\ &\Leftrightarrow A\cap F = \varnothing, \end{aligned}$$

alors :

$$A \subset C_E^F = \overline{F} \Leftrightarrow A \in P(\overline{F}).$$

Conclusion :

$$cl(\varnothing) = \left\{A \in P(\overline{F})\right\}.$$

(3) A-t-on : $E \in cl(\varnothing)$?

$$E \in cl(\varnothing) \Leftrightarrow E \subset \overline{F} \text{ ce qui est faux,}$$

donc : $E \notin cl(\varnothing)$.

(4) Déterminons $cl(E)$.

$$cl(E) = \{A \in P(E), A\Re E\}.$$

$$\begin{aligned} A\Re E &\Leftrightarrow A \cap F = E \cap F \\ &\Leftrightarrow A \cap F = F \\ &\Leftrightarrow F \subset A \\ &\Leftrightarrow A = F \cup X, X \subset \overline{F} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$cl(E) = \left\{F \cup X, X \in P\left(\overline{F}\right)\right\}.$$

En déduire $Cl(F)$, pour $X = \varnothing$, on trouve :

$$F \cup X = F \cup \varnothing = F \in Cl(E),$$

donc :

$$Cl(F) = cl(E).$$

car :

$$x \in cl(a) \Rightarrow cl(x) = cl(a).$$

ce supplémentaire : Soit $\Re$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\Re y \Leftrightarrow (x-y) \text{ multiple de } 4.$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence :

a) Montrons que $\Re$ est réflexive :

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}; x\Re x$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \times 4 \\ &\Rightarrow 0 \text{ multiple de } 4 \\ &\Rightarrow (x-x) \text{ multiple de } 4 \\ &\Rightarrow x\Re x \end{aligned}$$

Alors $\Re$ est réflexive.

b) Montrons que $\Re$ est symétrique :

$\Re$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}; x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

Soient $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x\Re y &\Rightarrow (x-y) \text{ multiple de } 4 \\ &\Rightarrow (x-y) = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (y-x) = 4(-k), (-k) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (y-x) \text{ multiple de } 4 \\ &\Rightarrow y\Re x. \end{aligned}$$

alors $\Re$ est symétrique.

c) Montrons que $\Re$ est transitive :

$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{Z}; x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow x\Re z$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{l} x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow (x-y) \text{ multiple de 4 et } (y-z) \text{ multiple de 4} \\ \Rightarrow (x-y) = 4k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ \text{et } \quad (y-z) = 4k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \text{La somme} \Rightarrow (x-z) = 4\left(k_1+k_2\right), \left(k_1+k_2\right) \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow (x-z) \text{ multiple de 4} \\ \Rightarrow x\Re z. \end{array}$$

Alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence car elle est réflexive, symétrique et transitive.

(2) Trouver la classe d'équivalence de 1 et de 3.

$$cl(a) = \{x \in \mathbb{Z}/x\Re a\}.$$

$$cl(1) = \{x \in \mathbb{Z}/x\Re 1\}.$$

$$\begin{aligned} x\Re 1 &\Leftrightarrow x-1 \text{ multiple de 4} \\ &\Leftrightarrow x-1 = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 4k+1, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$cl(1) = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}.$$

$$cl(3) = \{x \in \mathbb{Z}/x\Re 3\}.$$

$$\begin{aligned} x\Re 3 &\Leftrightarrow x-3 \text{ multiple de 4} \\ &\Leftrightarrow x-3 = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 4k+3, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$cl(3) = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}.$$

(3) Déterminer l'ensemble quotient:

Définition : l'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence, noté $E/\Re$.

$$E/\Re = \{cl(1), cl(2), cl(3), cl(0)\}.$$

car :

$$\mathbb{Z} = cl(1) \cup cl(2) \cup cl(3) \cup cl(0).$$

Exercice :

$$\text{Dans } \mathbb{R}^*, x\Re y \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 0$$

$$cl(1) = \{x \in \mathbb{R}^*, x > 0\} =]0, +\infty[.$$

$$cl(-1) =]-\infty, 0[.$$

Alors l'ensemble quotient :

$$E/\Re = \{cl(1), cl(-1)\}.$$

Exercice 05: Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^n = y.$$

(1) Montrons Φ est une relation d'ordre :

a) Φ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}^*, x\Phi x.$

Soit $x \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \text{Pour } n &= 1 \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^n = x. \\ &\Rightarrow x\Phi x. \end{aligned}$$

Alors Φ est réflexive.

b) Φ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}^*, x\Phi y$ et $y\Phi x \Rightarrow x = y.$

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x\Phi y \text{ et } y\Phi x &\Rightarrow (\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^{n_1} = y) \text{ et } (\exists n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } y^{n_2} = x) \\ &\Rightarrow (y^{n_2})^{n_1} = y \Rightarrow y^{n_2 n_1} = y \Rightarrow n_2 n_1 = 1 \\ &\Rightarrow n_2 = n_1 = 1 \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Alors Φ est antisymétrique.

c) Φ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, x\Phi y$ et $y\Phi z \Rightarrow x\Phi z.$

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x\Phi y \text{ et } y\Phi z &\Rightarrow (\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^{n_1} = y) \text{ et } (\exists n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } y^{n_2} = z) \\ &\Rightarrow (x^{n_1})^{n_2} = z \Rightarrow x^{n_1 n_2} = z, n_2 n_1 \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow x\Phi z. \end{aligned}$$

Alors Φ est transitive.

Conclusion :

Φ est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

(1) Cet ordre est-il total ?

L'ordre est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, x\Phi y \text{ ou } y\Phi x.$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}^*, (\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^{n_1} = y) \text{ ou } (\exists n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } y^{n_2} = x).$$

Pour $x = 2$ et $y = 5$:

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}^*, 2^n \neq 5 \text{ et } 5^n \neq 2, \\ &\Rightarrow (2 \text{ n'est pas en relation avec } 5 \text{ et } 5 \text{ n'est pas en relation avec } 2), \end{aligned}$$

alors l'ordre est partiel.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ ou } y \leq x. \text{(Brouillant)}$$

(2) Soit l'ensemble $A = \{1, 4, 8\}$. Déterminer s'ils existent, $\max A$ et $\min A$ pour l'ordre Φ.

Les majorants :

$$M \text{ majorant de } A \Leftrightarrow \forall x \in A, x\Phi M.$$

Alors :

$$\begin{cases} 1\Phi M \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } 1^{n_1} = M \Rightarrow M = 1. \\ 4\Phi M \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } 4^{n_2} = M \Rightarrow M = 4, 16, ... \\ 8\Phi M \Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } 8^{n_3} = M \Rightarrow M = 8, 64, ... \end{cases}$$

L'intersection entre les solutions donne que l'ensemble des majorants est vide.
Donc :

$$\sup A \text{ et } \max A \text{ n'existent pas.}$$

Remarque : Si on a la relation dans un autre exercice :
Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^n = y.$$

Soit l'ensemble $A = \{1, 4, 8\}$. Déterminer s'ils existent, $\max A$ et $\min A$ pour l'ordre Φ.

1. Les majorants :

$$M \text{ majorant de } A \Leftrightarrow \forall x \in A, x\Phi M.$$

Alors :

$$\begin{cases} 1\Phi M \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 1^{n_1} = M \Rightarrow M = 1. \\ 4\Phi M \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 4^{n_2} = M \Rightarrow M = 1, 4, 16, ... \\ 8\Phi M \Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 8^{n_3} = M \Rightarrow M = 1, 8, 64, ... \end{cases}$$

L'intersection entre les solutions donne que l'ensemble des majorants est $\{1\}$.
Donc :

$$\sup A = 1 \in A \Rightarrow \max A = 1.$$

Les minorants dans le cas : Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } x^n = y.$$

m est un minorant de $A \Leftrightarrow$

$$\forall x \in A, m\Phi x.$$

Donc :

$$\begin{cases} m\Phi 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } m^{n_1} = 1 \Rightarrow m = 1 \\ m\Phi 4 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } m^{n_1} = 4 \Rightarrow m = 2, 4 \\ m\Phi 8 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } m^{n_1} = 8 \Rightarrow m = 2, 8 \end{cases}$$

L'intersection entre les solutions donne que l'ensemble des minorants est vide.
Donc :

$$\inf A \text{ et } \min A \text{ n'existent pas.}$$

Remarque 3: Si on a la relation dans un autre exercice :
Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^n = y.$$

m est un minorant de $A \Leftrightarrow$

$$\forall x \in A, m\Phi x.$$

Donc :

$$\begin{cases} m\Phi 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m^{n_1} = 1 \Rightarrow m \in \mathbb{N}^* \,(a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{N}^*) \\ m\Phi 4 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m^{n_1} = 4 \Rightarrow m = 2, 4 \\ m\Phi 8 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m^{n_1} = 8 \Rightarrow m = 2, 8 \end{cases}$$

L'intersection entre les solutions donne que l'ensemble des minorants est $\{2\}$.
Donc :

$$\inf A = 2 \notin A \text{ donc } \min A \text{ n'existe pas.}$$

Remarque 4 : Si on veut trouver les majorants et les minorants de B pour l'exercice :
Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^n = x.$$

avec $B = \{2, 8, 64\}$.

$$2^3 = 8 \Rightarrow 8\Phi 2 \text{ et } 8^2 = 64 \Rightarrow 64\Phi 8.$$

Conclusion :

$$64\Phi 8\Phi 2 \Rightarrow \sup A = \max A = 2 \text{ et } \inf A = \min A = 64.$$

Les majorants :

$$\begin{aligned} M \text{ est un majorant de } A &\Leftrightarrow 2\Phi M \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } M^n = 2 \Rightarrow M = 2. \end{aligned}$$

Donc le seul majorant est 2.
Les minorants :

$$\begin{aligned} m \text{ est un majorant de } A &\Leftrightarrow m\Phi 64 \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 64^n = m \Rightarrow m = 1, 64, 64^2, ... \end{aligned}$$

Donc les minorants sont : $\{64^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 06: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\leq$ définie par :

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

(1) Montrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

a) Montrons que $\leq$ est reflexive.
$\leq$ est reflexive $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \leq (x, y)$.

$$x \leq x \text{ et } y \leq y \Rightarrow (x, y) \leq (x, y),$$

donc $\leq$ est reflexive.

b) Montrons que $\leq$ est antisymétrique.

$\leq$ est reflexive $\Leftrightarrow$

$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \leq (x',y')$ et $(x',y') \leq (x,y)$ alors $(x,y) = (x',y')$.

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (x,y) &\leq (x',y') \text{ et } (x',y') \leq (x,y) \\ &\Rightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y') \text{ et } (x' \leq x \text{ et } y' \leq y) \\ &\Rightarrow x = x' \text{ et } y = y' \\ &\Rightarrow (x,y) = (x',y'). \end{aligned}$$

donc $\leq$ est antisymétrique.

c) Montrons que $\leq$ est transitive.

$\leq$ est transitive $\Leftrightarrow$

$\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \leq (x',y')$ et $(x',y') \leq (x'',y'')$ alors $(x,y) \leq (x'',y'')$.

Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (x,y) &\leq (x',y') \text{ et } (x',y') \leq (x'',y'') \\ &\Rightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y') \text{ et } (x' \leq x'' \text{ et } y' \leq y'') \\ &\Rightarrow (x \leq x'' \text{ et } y \leq y'') \\ &\Rightarrow (x,y) \leq (x'',y''). \end{aligned}$$

donc $\leq$ est transitive.

Conclusion : $\leq$ est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

L'ordre est-il total ?

L'ordre est total $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \forall (x,y), (x',y') &\in \mathbb{R}^2, \text{ on a } (x,y) \leq (x',y') \text{ ou } (x',y'), (x,y) \\ &\Rightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y') \text{ ou } (x' \leq x \text{ et } y' \leq y). \end{aligned}$$

Pour $(2,3)$ et $(6,1)$ on a ni $(2,3) \leq (6,1)$ ni $(6,1) \leq (2,3)$, alors l'ordre est partiel.

(2) Préciser deux minorants, deux majorants, bornes inférieure et supérieure des parties suivantes :

$$B = \{(3,5), (1,2)\}.$$

$$(1,2) \leq (3,5).$$

Alors :

$$\sup B = \max B = (3,5) \text{ et } \inf B = \min B = (1,2).$$

De plus pour les majorants :

(M_1, M_2) est un majorant de $B \Leftrightarrow \forall (x,y) \in B, (x,y) \leq (M_1, M_2)$, donc :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} (3,5) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow 3 \leq M_1 \text{ et } 5 \leq M_2 \\ (1,2) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow 1 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad & 3 \leq M_1 \text{ et } 5 \leq M_2, \end{aligned}$$

alors l'ensemble des majorants est :

$$\{(M_1, M_2), 3 \leq M_1 \text{ et } 5 \leq M_2\}.$$

deux majorants sont : $(4,6), (15,20)$.

Pour les minorants :

(m_1, m_2) est un minorant de $B \Leftrightarrow \forall (x,y) \in B, (m_1, m_2) \leq (x,y)$, donc :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} (m_1, m_2) \leq (3,5) \Rightarrow m_1 \leq 3 \text{ et } m_2 \leq 5 \\ (m_1, m_2) \leq (1,2) \Rightarrow m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad & m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 2, \end{aligned}$$

alors l'ensemble des majorants est :

$$\{(m_1, m_2), m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 2\}.$$

deux majorants sont : $(-4,-6), (-15,-20)$.

$$A = \{(1,2), (3,1)\}.$$

De plus pour les majorants :

(M_1, M_2) est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall (x,y) \in A, (x,y) \leq (M_1, M_2)$, donc :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} (1,2) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow 1 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2 \\ (3,1) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow 3 \leq M_1 \text{ et } 1 \leq M_2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad & 3 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2, \end{aligned}$$

alors l'ensemble des minorants est :

$$\{(M_1, M_2), 3 \leq M_1 \text{ et } 2 \leq M_2\}.$$

deux minorants sont : $(4,6), (15,20)$.

Pour les minorants :

(m_1, m_2) est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall (x,y) \in A, (m_1, m_2) \leq (x,y)$, donc :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} (m_1, m_2) \leq (1,2) \Rightarrow m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 2 \\ (m_1, m_2) \leq (3,1) \Rightarrow m_1 \leq 3 \text{ et } m_2 \leq 1 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad & m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 1, \end{aligned}$$

alors l'ensemble des minorants est :

$$\{(m_1, m_2), m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \leq 1\}.$$

deux minorants sont : $(-4,-6), (-15,-20)$.

(3) La partie A possède-t-elle un plus grand élément? Un plus petit élément?.

$$\sup A = (3,2) \notin A \Rightarrow \max A \text{ n'existe pas.}$$

et :

$$\inf A = (1,1) \notin A \Rightarrow \min A \text{ n'existe pas.}$$

Exercice 07: Soit E l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x]$ avec $x \in \mathbb{R}$,

c'est-à-dire : $E = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. On définit dans E la relation $\Re$ par :

$$\forall X, Y \in E, X \Re Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

a) $\Re$ est-elle réflexive?
$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall X \in E, X \Re X$.

$$X \subset X \Rightarrow X \Re X,$$

alors $\Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est-elle antisymétrique?
$\Re$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall X, Y \in E, X \Re Y$ et $Y \Re X \Rightarrow X = Y$.
Soient $X, Y \in E$:

$$X \Re Y \text{ et } Y \Re X \Rightarrow X \subset Y \text{ et } Y \subset X \Rightarrow X = Y,$$

alors $\Re$ est antisymétrique.

c) $\Re$ est-elle transitive?
$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall X, Y, Z \in E, X \Re Y$ et $Y \Re Z \Rightarrow X \Re Z$.
Soient $X, Y, Z \in E$:

$$X \Re Y \text{ et } Y \Re Z \Rightarrow X \subset Y \text{ et } Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z \Rightarrow X \Re Z,$$

alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : $\Re$ est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

(2) L'ordre est-il total? Justifier.

L'ordre est total si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall X, Y &\in E, X \Re Y \text{ ou } Y \Re X. \\ &\Rightarrow \forall X, Y \in E, X \subset Y \text{ ou } Y \subset X. \end{aligned}$$

Sachant que : $E = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. Donc dans ce cas :

$$X =]-\infty, x_1] \text{ et } Y =]-\infty, x_2]$$

1er cas : Si $x_1 \geq x_2$, alors :
$$Y \subset X \Rightarrow Y \Re X.$$
2 ème cas : Si $x_1 \leq x_2$, alors :
$$X \subset Y \Rightarrow X \Re Y.$$
Conclusion : L'ordre est total.

(3) Soit $F \subset E$ défini par : $F = \{]-\infty, x], x \leq 5\}$.

a) Déterminer l'ensemble des majorants de F.

M est un majorant de $F \Leftrightarrow \forall X \in F, X \Re M$.
$$X \Re M \Leftrightarrow X \subset M,$$
alors l'ensemble des majorants est :
$$\{]-\infty, y], y \geq 5\}.$$

b) Déterminer, s'ils existent, $\sup F$ et le plus grand élément de F.
$$\sup F =]-\infty, 5] \in F \Rightarrow \max F = \sup F =]-\infty, 5].$$

a) Déterminer l'ensemble des minorants de F.

m est un minorant de $F \Leftrightarrow \forall X \in F, m \Re X$.
$$m \Re X \Leftrightarrow m \subset X,$$
alors l'ensemble des minorants est :
$$\varnothing.$$
$$F = \{]-\infty, x], x \leq 5\}.$$

b) Déterminer, s'ils existent, $\inf F$ et le plus petit élément de F.
$$\inf F \text{ et } \min F \text{ n'existe pas.}$$