Faculté des sciences **Année universitaire 2021-2022**
Département de mathématiques **Algèbre**
**"Logique - Modes de raisonnement- Théorie de ensembles" ***Le corrigé*

Exercice 01: Soit P, Q et R trois propositions.

(1) Dresser la table de vérité de la proposition suivante: messirdi bachir

$$(A) : \left[(P \Rightarrow Q) \vee \overline{R}\right] \Leftrightarrow [R \wedge (Q \Rightarrow P)] .$$

P	Q	R	$\overline{R}$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \vee \overline{R}$	$R \wedge (Q \Rightarrow P)$	(A)
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0

(2) Sans l'utilisation de la table de vérité montrons que cette proposition est vraie:

$(1) : \ \left(P \wedge \bar{P}\right)$ fausse.
$(2) : \left(P \vee \bar{P}\right)$ vraie.
$(3) : \ \left(P \wedge \bar{P}\right) \wedge R \Rightarrow H$ vraie.

$$(4) \left[(P \Rightarrow Q) \wedge \left(P \wedge \overline{Q}\right)\right] \Rightarrow R.$$

Puisque $P \wedge \overline{Q}$ est la négation de la proposition $P \Rightarrow Q$, alors la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge \left(P \wedge \overline{Q}\right)$ est toujour fausse donc l'implication est vraie si la première proposition est fausse.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \Rightarrow & 1 \\ 1 & \Rightarrow & 1 \end{array}$$

$$(5) : [(P \Rightarrow Q) \wedge R] \Rightarrow \left(P \vee \bar{P}\right).$$

(3) Ecrire la négation et la contraposée de la proposition suivante:

des quantificateurs : $P \Rightarrow Q$

La négation est:

(négation) des quantificateurs : $P \wedge \overline{Q}$.

La contraposée est:

(laissez) les quantificateurs : $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

$$(a) : (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{Z}) ; (x - y < 0) \Rightarrow (y \geq 0) .$$

La négation est:

$$\overline{(a)} : (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{Z}) ; (x - y < 0) \wedge (y < 0) .$$

La contraposée est:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{Z}) ; (y < 0) \Rightarrow (x - y \geq 0) .$$

$$...., (P \quad \Rightarrow \quad Q) \Leftrightarrow ...., (\ \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}).$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$...., (P \Rightarrow Q)$$

Exercice 02: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

$\forall x \in, \exists y \in .... \rightarrow y$ dépend de x.[redacted]

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, x + y > 0.$
Dans cette proposition le y dépend de x s'il existe donc :

$$x + y > 0 \Rightarrow y > -x,$$

alors on a deux cas

1er cas: si $-x < 0 \Rightarrow x > 0$, alors il suffit de prendre $y = 0.$ ou bien $(1, 2, 3, ...)$
2ème cas: si $-x \geq 0$, alors il suffit de prendre $y = [-x] + 1.$
où $[.]$ désigne la partie entière (qu'on peut la noter $E(.)$).

Conclusion: Dans les deux cas la proposition est vraie.
La négation est :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, x + y \leq 0.$$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x - y < 0.$

La négation de cette proposition est :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x - y \geq 0.$$

Dans cette proposition le y dépend de x s'il existe donc

$$2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2x,$$

qui est vraie car il suffit de prendre: $y = 2x$ par exemple.
Conclusion: La proposition $b)$ est fausse car la négation est vraie.

b2) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, 2x - y < 0.$
La négation de cette proposition est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, 2x - y \geq 0.$$

Dans cette proposition le y dépend de x s'il existe donc

$$2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2x,$$

qui est vraie car il suffit de prendre: $y = [2x]$ par exemple.

Alors la proposition b2) est fausse.

b3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, 2x - y < 0.$
La négation de cette proposition est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, 2x - y \geq 0.$$

Dans cette proposition le y dépend de x s'il existe donc

$$2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2x,$$

Alors si $2x < 0$, le y n'existe pas ce qui implique que la négation est fausse donc la proposition b2) est vraie.

c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y^2 - xy - 3x > 0.$
1er cas : Si $y \neq 0$:

Les poynômes de degré 2 change le signe si le discriminant $\triangle > 0$.

$$y^2 - xy - 3x = 0 \Rightarrow \triangle = x^2 + 12x.$$

Le signe de $\triangle = (-x)^2 - 4(1)(-3x) = x^2 + 12x = x(x + 12)$

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & + & -12 & - & 0 & + & +\infty \end{array}$$
$$- - - - - - - - - - - - \rangle$$

Alors si on va prendre un $x \in [-12, 0]$; on trouve $\triangle \leq 0$, donc le signe du polynôme est le signe de a qui est positive.

2 ème cas : Si $y = 0 \Rightarrow -3x > 0$, alors il suffit de prendre $x = -1$.

Dans les deux cas est vraie.

d) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y^2 - xy - 3x < 0.$

Exercice 03: Sachant que si p est premier alors $\sqrt{p}$ est irrationnel, montrons que:

(1) On montre que: $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde on suppose que:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2}+\sqrt{5} &= \alpha \in \mathbb{Q}, \\
&\Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = \alpha - \sqrt{5} \\
&\Rightarrow 2 = \left(\alpha - \sqrt{5}\right)^3, \\
&\Rightarrow 2 = \alpha^3 - 3\sqrt{5}\alpha^2 + 15\alpha - 5\sqrt{5}, \\
&\Rightarrow \sqrt{5}(3\alpha^2+5) = 15\alpha + \alpha^3 - 2, \\
&\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{15\alpha + \alpha^3 - 2}{3\alpha^2+5} \in \mathbb{Q},
\end{aligned}$$

d'où la contradiction.
Alors $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

(2) On montre que : $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q} \left(\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}\right)$.

Par l'absurde on suppose que :

$$\begin{aligned}
\log_{10} 2 &\in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{p}{q} \text{ avec } p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } (p \wedge q = 1), \\
&\Rightarrow q \ln 2 = p \ln 10 \Rightarrow \ln 2^q = \ln 10^p, \\
&\Rightarrow 2^q = 10^p = 2^p \times 5^p \\
&\Rightarrow \frac{2^q}{2^p} = 5^p, \\
&\Rightarrow (\text{pair} \leftarrow 2^{q-p} = 5^p \rightarrow \text{impair}) \text{ car } p \neq q,
\end{aligned}$$

d'où la contradiction. messirdi bachir

Exercice 04: On montre par récurrence que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9 (est divisible par 9) .(R_n)

1ère étape: pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}
&4^0 - (6 \times 0) - 1 = 0 = 0 \times 9, \\
&\Rightarrow 4^0 - (6 \times 0) - 1 \text{ est un multiple de } 9, \\
&\Rightarrow R_0 \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

2ème étape: On suppose que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé (l'hypothèse de récurrence) c'est-à-dire:

$$4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9 \Leftrightarrow 4^n + 6n - 1 = 9k, k \in \mathbb{N},$$

et montrons que (R_{n+1}) est vraie, c'est-à-dire :

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

En effet:

$$\begin{aligned}
&4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times 4^n+6n+6-1\\
&=(1+3)\times 4^n+6n-1+6\\
&=(4^n+6n-1)+3\times 4^n+6\\
&=9k+3\times 4^n+6 \text{ (l'hypothèse de récurrence)}\\
&=9k+3(9k-6n+1)+6=9(k+3k-2n+1)=9\times k',\\
&\Rightarrow 4^{n+1}+6(n+1)-1 \text{ est un multiple de } 9,
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (R_{n+1})$ est vraie.
Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N}, 4^n+6n-1 \text{ est un multiple de } 9.$$

(2) Montrons par récurrence que :

$$\forall n\geq 4, n^2\leq 2^n, \ldots (R_n)$$

1ère étape: Si $n=4$,

$$\begin{aligned}
4^2 &= 16 \text{ et } 2^4=16\Rightarrow 4^2\leq 2^4,\\
&\Rightarrow R_4 \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

2ème étape: On suppose que (R_n) est vraie pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé (l'hypothèse de récurrence) c'est-à-dire :

$$n^2\leq 2^n$$

et montrons que (R_{n+1}) est vraie, c'est-à-dire:

$$(n+1)^2\leq 2^{n+1}?$$

En effet:

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}+2n+1\leq \underbrace{2^n}+2n+1 \text{ (l'hypothèse de récurrence),}$$

$$\begin{aligned}
\text{Il suffit de démontrer que } &: 2n+1\leq 2^n?\text{mais : } n^2\leq 2^n\\
&\leq 2^{n+1}=2\times 2^n=2^n+2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(n+1)^2=n^2+2n+1\leq 2^n+2n+1 \text{ (l'hypothèse de récurrence),}\\
&\text{mais : } 2n+1\leq n^2\\
&\text{car : } n^2-(2n+1)=n^2-2n+1-2=(n-1)^2-2\geq 0 \text{ si: } n\geq 4,\\
&\Rightarrow 2n+1\leq n^2\leq 2^n, \text{(l'hypothèse de récurrence),}\\
&\Rightarrow (n+1)^2\leq 2^n+2^n=2^{n+1},\\
&\Rightarrow (R_{n+1}) \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n\geq 4, n^2\leq 2^n.$$

Exercice 05:

1) Soit $E = \{3, 6\}$

a) Déterminer $\wp(E)$ (l'ensemble des parties de E).

$\wp(E) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, E\}$

b) Déterminer $\wp(\wp(E))$.

$$\wp(\wp(E)) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\{6\}\}, \{E\}, \{\emptyset, \{3\}\}, \{\emptyset, \{6\}\}, \{\emptyset, E\}, \{\{3\}, \{6\}\}, \{\{3\}, E\}, \\ \{\{6\}, E\}, \{\emptyset, \{3\}, \{6\}\}, \{\emptyset, \{3\}, E\}, \{\emptyset, \{6\}, E\}, \{\{3\}, \{6\}, E\}, \wp(E) \end{array} \right\}.$$

2) Soit $F = \{1, 5, 7\}$.

a) Déterminer $\wp(F)$ ensemble des parties de F.

$\wp(F) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, F\}$.

b) Compléter les propositions suivantes par les symboles: $\in, \notin, \subset$.

$$\begin{array}{rcl} \text{élément} & \in & \text{ensemble.} \\ \text{élément} & \notin & \text{ensemble.} \\ \text{ensemble} & \subset & \text{ensemble.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \{\emptyset\} & \subset & \{\emptyset, ...b\} \\ \{\emptyset\} & \subset & \wp(\wp(F)) \\ \{\emptyset\} & \in & \wp(\wp(F)) \\ \{\emptyset\} & \subset & \wp(F) \\ \wp(F) & \in & \wp(\wp(F)) = \{\varnothing, \{\emptyset\} ..., \wp(F)\}. \end{array}$$

i) $5 \notin \wp(F)$.

ii) $\{1, 7\} \in \wp(F)$.

iii) $\{5, 7\} \subset F$.

iv) $\emptyset \subset F$.

v) $\emptyset \in \wp(F)$.

vi) $\{\emptyset\} \subset \wp(F)$.

Exercice 06: Soit E un ensemble non vide, A, B et C trois parties non vides de E.

(1) Montrons que: MESIRDI BACHIR

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap C \Rightarrow A \cap C_E^B = A \cap C_E^C? \\ &\text{et} \\ A \cap C_E^B &= A \cap C_E^C \Rightarrow A \cap B = A \cap C? \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ " hypothèse : $A \cap B = A \cap C$.

Problème : $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$?

a) montrons que: $A \cap C_E^B \subset A \cap C_E^C$.

Soit $x \in A \cap C_E^B \Rightarrow x \in A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow x \in A$ et $[x \in E$ et $x \notin B] \Rightarrow x \in E$ et $[x \in A$ et $x \notin B]$

$\Rightarrow x \in E$ et $[x \notin A \cap B] \Rightarrow x \in E$ et $[x \notin A \cap C]$ car: $A \cap B = A \cap C$.(l'hypothèse)

$\Rightarrow x \in E$ et $[x \in A$et $x \notin C]$ car $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ et $[x \in E$ et $x \notin C] \Rightarrow x \in A$ et $x \in C_E^C \Rightarrow x \in A \cap C_E^C$.

b) montrons que: $A \cap C_E^C \subset A \cap C_E^B$?

Soit $x \in A \cap C_E^C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C_E^C \Rightarrow x \in A$ et $[x \in E$ et $x \notin C] \Rightarrow x \in E$ et $[x \in A$et $x \notin C]$

$\Rightarrow x \in E$ et $[x \notin A \cap C] \Rightarrow x \in E$ et $[x \notin A \cap B]$ car: $A \cap B = A \cap C$..(l'hypothèse)

$\Rightarrow x \in E$ et $[x \in A$et $x \notin B]$ car $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ et $[x \in E$ et $x \notin B] \Rightarrow x \in A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow x \in A \cap C_E^B$.

" $\Leftarrow$ " hypothèse: $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$.

Problème: $A \cap B = A \cap C$?

a) montrons que: $A \cap B \subset A \cap C$?

Soit $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$ et $x \notin C_E^B \Rightarrow x \notin A \cap C_E^B$

$\Rightarrow x \notin A \cap C_E^C \Rightarrow x \notin C_E^C$car $x \in A$.

$\Rightarrow x \in A$et $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap C$.

b) montrons que : $A \cap C \subset A \cap B$

Soit $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C \Rightarrow x \in A$ et $x \notin C_E^C \Rightarrow x \notin A \cap C_E^C$

$\Rightarrow x \notin A \cap C_E^B \Rightarrow x \notin C_E^B$car $x \in A$.

$\Rightarrow x \in A$et $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$.

Conclusion :

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$$

(2) Montrons que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

" $\Rightarrow$ " Montrons que :

$$A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C?$$

a) Montrons que: $B \subset A$?

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad &: \quad x \in B \text{ alors } x \in A \cup B, \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cap C \text{ d'après l'hypothèse}, \\ &\Rightarrow \quad x \in A \Rightarrow B \subset A. \end{aligned}$$

1. b) Montrons que: $A \subset C$?

$$\begin{aligned} \text{Si } x &\in A \text{ alors } x \in A \cup B, \\ &\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow\ x \in C \Rightarrow A \subset C, \\ &\Rightarrow B \subset A \subset C. \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Montrons que :

$$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C?$$

a) Montrons que: $A \cup B \subset A \cap C$?

$$\begin{aligned} \text{Si} &: \quad x \in A \cup B \text{ alors : } \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in C, \text{l'hypothèse} \\ \text{ou } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C \end{cases} \\ \Rightarrow &\quad x \in A \cap C. \end{aligned}$$

b) Montrons que: $A \cap C \subset A \cup B$?

$$x \in A \cap C \Rightarrow\ x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \cap C \subset A \cup B.$$

(3) On donne deux propositions équivalentes à la proposition suivante:
Rappel: Sachant que si P et Q sont deux propositions alors

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \left(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}\right) \text{ (contraposée)} \\ (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \overline{\overline{(P \Rightarrow Q)}} \text{ (la négation de la négation)} \end{aligned}$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B.$$

Alors La première négation est :

$$\begin{aligned} x &\in A \text{ et } x \notin A \triangle B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } \left[x \in A \cap B \text{ ou } x \in C_E^{A \cup B}\right] \\ &\Rightarrow x \in A \cap B. \end{aligned}$$

La deuxième proposition est la négation de la négation en effet:

La première négation est:

$$x \in A \text{ et } x \notin A \triangle B \Rightarrow x \in A \cap B.$$

D'où la $2^{ème}$ négation est:

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in\ \bar{A} \cup \bar{B}.\ (\bar{A} \text{ est le complémentaire}).$$

Alors :

$$[x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B] \Leftrightarrow [x \notin A \cap B].$$

Pour la contraposée :

$$[x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B] \Leftrightarrow [x \notin A \triangle B \Rightarrow x \notin A].$$

Exercice 07:

(a) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ est fausse, car il suffit de prendre:

$A = \{1\}, B = \{2\}$ on a : $A \cup B = \{1, 2\}$ donc:

$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

mais:

$$\begin{aligned} P(A) \cup P(B) &= \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} \\ &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \neq P(A \cup B). \end{aligned}$$

(b) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ est vraie car :

$$\begin{aligned} X &\in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \subset A \text{ et } X \subset B, \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \text{ et } X \in P(B), \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B). \end{aligned}$$