Table des Matières

.

Chapitre 1

Les applications

1.1 Notion d'application

Étant donné deux ensembles E et F on définit une application de E dans F en se donnant une règle permettant de faire correspondre à tout élément de E un élément déterminer de F. On note souvent les applications par: $f, g, h, \ldots$. Si $x \in E$, $f(x)$ désigne l'image dans F, et on écrit:

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \to F \\ x & \longmapsto & f(x) = y. \end{array}$$

On dit que x est l'antécédent de y, E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivé.

Exemple 1.1

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 6x + 3. \end{array}$$

1.2 Égalité de deux applications

Pour montrer que deux applications f et g sont égales, on montre qu'elles ont le même ensemble de départ E, et le même ensemble d'arrivé F et que:

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

1.3 Composée de deux applications

Soient f une application d'un ensemble E_1 dans un ensemble F_1 et g une application de E_2 dans un ensemble F_2 ç-à-d:

$$f : E_1 \to F_1 \text{ et } g : E_2 \to F_2.$$

Alors pour que $g \circ f$ existe il suffit que: $f(E_1) \subset E_2$ et on a:

$$\begin{aligned} g \circ f \quad &: \quad E_1 \to F_2 \\ x \quad &\mapsto \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Exemple 1.2

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = 2x, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{et } g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair,} \\ \frac{x+1}{2} \text{ si } x \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Calculons s'il existe $f \circ g$ et $g \circ f$. En effet:

$$\begin{aligned} f \circ g \quad &: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \quad &\mapsto \quad f(g(x)) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \text{ est pair,} \\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) \text{ si } x \text{ est impair.} \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} x \text{ si } x \text{ est pair,} \\ x+1 \text{ si } x \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} g \circ f \quad &: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \quad &\mapsto \quad g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(2x\right) = x \;\; \textit{car } 2x = y \;\; \textit{est un entier pair.} \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Dans le cas général:* $g \circ f \neq f \circ g$ *(voir l'exemple).*

1.4 Image d'une partie

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A une partie de E. Alors l'image de A par f est définie par:

$$f\left(A\right) = \left\{f\left(x\right) / x \in A\right\}.$$

Exemple 1.3

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} \\ x \quad &\mapsto \quad f\left(x\right) = \left|x\right| \;\; \textit{et } A = \left\{-1, 1, -2, 2, -3, 3\right\}. \end{aligned}$$

On a donc:

$$f\left(A\right) = \left\{1, 2, 3\right\}.$$

1.5 Injectivité

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

$$f \text{ est } \textbf{injective} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right).$$

Ou bien:

$$\forall x_1, x_2 \in E, f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (la contraposée).}$$

Cela signifie que chaque $y \in F$ admet au plus un antécédant $x \in E$.

Exemple 1.4

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array} \qquad \begin{array}{c} et\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} \\ x \mapsto g(x) = |x| . \end{array}$$

Alors: 1) f est injective car:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2) .$$

2) g n'est pas injective car: par exemple $2 \neq -2$ mais $f\ (2) = f\ (-2) = 2$.

1.6 Surjectivité

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors:

$$f \text{ est } \textbf{surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que: } f(x) = y.$$

C'est à dire chaque élément de l'ensemble d'arrivé admet un antécédent.

Remarque 1.2 *Pour montrer la surjectivité il suffit de trouver les x en fonction des y, et voir si x existe dans le domaine E pour tous les $y \in F$.*

Exemple 1.5

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = |x| , \end{array} \qquad \begin{array}{c} et\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \ \ si\ x\ est\ pair, \\ \frac{x+1}{2} \ \ si\ x\ est\ impair. \end{cases} \end{array}$$

Alors: (1) f n'est pas surjective car si $y \in \mathbb{R}^{-}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = |x| \neq y$.

(2) g est surjective car: $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x = 2y \in \mathbb{N}$ avec $f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y$.

Remarque 1.3 *Il existes autres définitions d'injectivité et surjectivité qui utilise la notion de la dérivée c'est surtout dans le cours d'analyse sur les fonctions.*

1.7 Bijectivité

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.Alors f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, ou bien la formule:

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \text{ tel que: } f(x) = y.$$

Exemple 1.6

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f(x) = |x|. \end{array}$$

f est bijective, car: $y \in \mathbb{R}^+, \exists! x \in \mathbb{R}^+$ tel que: $f(x) = |x| = x = y$.

1.8 Bijection réciproque (image inverse ou réciproque)

Soit f une application bijective d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors l'application réciproque notée f^{-1} est définie de F dans E, qui a pour chaque élément y, on associe un élément unique x.

Exemple 1.7

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 3x + 5. \end{array}$$

Alors pour trouver l'image réciproque on a:

$$y = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3},$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{y-5}{3}. \end{array}$$

1.9 Image réciproque d'une partie

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et B une partie de F. Alors l'image réciproque de B par f est définie par:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f \ (x) \in B\}.$$

Exemple 1.8

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = |x| \ \ et\ B = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

On a donc:

$$f^{-1}(B) = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}.$$

Remarque 1.4 *L'image inverse d'un élément existe sauf si l'application est bijective mais l'image inverse d'un ensemble existe dans tous les cas.*

Exemple 1.9

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = x^2 \ \ et\ A = \{4\}. \end{aligned}$$

On a: $f(2) = f(-2) = 4$ *avec* $2 \neq -2$ *alors* f *n'est pas injective donc n'est pas bijective alors:*
$f^{-1}(4)$ *n'existe pas mais* $f^{-1}(A) = f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.

1.10 Involution

Définition 1.1 *Une involution est une bijection d'un ensemble* E *sur lui-même, qui est égale à son inverse, c'est à dire:*

$$\forall x \in E, f(x) = f^{-1}(x).$$

$\Rightarrow f[f(x)] = x$ *ou bien:* $f \circ f = I$ *où* I *est l'application identité donnée par*: $\forall x \in E, I(x) = x$.

Exemple 1.10

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = x. \end{aligned}$$

1.11 Propriétés des applications

Soit $f : E \rightarrow F, \forall A, B \in P(E)$ et $C, D \in P(F)$, on a les propriétés suivantes:

(1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Preuve: Si $y \in f\ (A) \Rightarrow \exists x \in A$ tel que, $f(x) = y \Rightarrow \exists x \in B$ tel que, $f(x) = y$ car: $A \subset B \Rightarrow y \in f(B) \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. ■

(2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ L'égalité n'ayant lieu que si f est injective.

Exemple 1.11 $A = \{0, \pi\}, B = \{0, 3\pi\}$ *et* $f\ (x) = \cos x$ *(*f *n'est pas injective).*
On a: $f(A) = \{1, -1\}$ *et* $f(B) = \{1, -1\}$ *alors:* $f(A \cap B) = \{1\}$ *et* $f(A) \cap f(B) = \{1, -1\}$, *ce qui implique que:* $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

(4) $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

(5) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(6) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.