# Table des Matières



.

# Chapitre 1

# Relation d'équivalence - Relation d'ordre

## 1.1 Notion de la relation binaire

On appelle relation de $E$ vers $F$ tout procédé associant à des éléments de $E$ des éléments de $F$ notée généralement par $\Re, S, \Gamma, \Phi, \ldots$ .

Soit $\Re$ une relation de $E$ vers $F$. Si $u \in E$ est en relation avec $v \in F$, qu'on la note par: $u \Re v$.

L'ensemble des couples $(u, v) \in E \times F$ vérifiant une relation $\Re$ est appelé le **graphe** de $\Re$.

Si $E = F$, une relation de $E$ vers $F$ est appelée **relation binaire** sur $E$ ( ou dans $E$). Par exemple l'égalité est une relation binaire sur tout ensemble $E$.

**Remarque 1.1** *Les éléments de $E$ notés $u$, $v$ et $w$ sont généralements soient :*
*(1) Des nombres dans $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots)$ donc on peut les remplacés par: $x, y$ et $z$.*
*(2) Des couples c'est-à-dire: $(x, y)$ dont en peut utiliser les indices c'est-à-dire: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et $(x_3, y_3)$.*
*(3) Des ensembles donc on peut les remplacés par: $X, Y$ et $Z$.*

### 1.1.1 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soit $\Re$ une relation binaire dans un ensemble $E$ et $u, v, w$ des éléments de $E$.

**La Réflexivité**

**Définition 1.1** $\Re$ *est* ***réflexive*** *si et seulement si:*

$$\forall u \in E, u \Re u.$$

**Exemple 1.1** *Soit* $\Re$ *la relation définie sur* $\mathbb{Z}$ *par:*

$$x \Re y \Leftrightarrow 3 \ \textit{divise} \ (x-y)\,.$$

***Rappel:*** $a$ *divise* $b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = ka.$

*Alors on a:pour tout* $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0 \times 3$, *donc* $3$ *divise* $(x-x)$, *d'où* $x \Re x$, *et par suite* $\Re$ *est réflexive.*

**La transitivité**

**Définition 1.2** $\Re$ *est* ***transitive*** *si et seulement si:*

$$\forall u, v, w \in E, (u \Re v \ \textit{et} \ v \Re w) \Rightarrow u \Re w.$$

**Exemple 1.2** *Soit* $\Re$ *la relation définie sur* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *par:*

$$\left(x, x'\right) \Re \left(y, y'\right) \Leftrightarrow x + x' = y + y'.$$

*Alors on a: pour tout* $(x, x'), (y, y')$ *et* $(z, z') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(x, x'\right) \Re \left(y, y'\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x + x' = y + y', \\ \textit{et} \ \left(y, y'\right) \Re \left(z, z'\right) \quad &\Leftrightarrow \quad y + y' = z + z', \end{aligned}$$

*ce qui implique que:* $x + x' = z + z'$, *d'où* $(x, x') \Re (z, z')$, *et par suite* $\Re$ *est transitive.*

**La symétrie**

**Définition 1.3** $\Re$ *est* ***symétrique*** *si et seulement si:*

$$\forall u, v \in E,\ u\Re v \Rightarrow v\Re u.$$

**Exemple 1.3** *Soit* $\Re$ *la relation définie sur* $\mathbb{R}$ *par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow (x-y) \text{ est un multiple de } 2.$$

*Alors on a:* $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\Re y \Leftrightarrow (x-y)$ *est un multiple de* $2$

$\Rightarrow (y-x)$ *est un multiple de* $2 \Rightarrow y\Re x$, *et par suite* $\Re$ *est symétrique.*

**L'antisymétrie**

**Définition 1.4** $\Re$ *est* ***antisymétrique*** *si et seulement si:*

$$\forall u, v \in E, (u\Re v \text{ et } v\Re u) \Rightarrow u = v.$$

**Exemple 1.4** *Soit* $\Re$ *la relation définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par:*

$$a\Re b \Leftrightarrow a \text{ divise } b.$$

*Soient* $a, b \in \mathbb{N}^*$, *on a:*

$$a\Re b \Leftrightarrow a \text{ divise } b \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*, b = k_1 a,$$

*d'autre part on a:*

$$b\Re a \Leftrightarrow b \text{ divise } a \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^*, a = k_2 b,$$

*Ainsi,*

$$a = k_2 k_1 a \Rightarrow k_2 k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = k_1 = 1 \Rightarrow a = b.$$

*et par suite* $\Re$ *est antisymétrique.*

## 1.2 Relation d'équivalence

### 1.2.1 Définition d'une relation d'équivalence

**Définition 1.5** *Une relation définie dans un ensemble $E$ est dite une relation* ***d'équivalence*** *si et seulement si elle est:*
*Réflexive, symétrique et transitive.*
*De plus si $u\Re v$, avec $\Re$ est une relation d'équivalence, alors on dit que $u$ est équivalent à $v$ modulo $\Re$.*

**Exemple 1.5** *La relation $\Re$définie sur $\mathbb{Z}$ par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow 3 \text{ divise } (x-y) \text{ est une relation d'équivalence dans } \mathbb{Z}.$$

### 1.2.2 Classe d'équivalence

**Définition 1.6** *Une* ***classe d'équivalence*** *d'un élément $u$ donné pour une relation d'équivalence définie sur $E$ est la partie des éléments $v$ équivalents à cet élément. Elle est notée: $\dot{u}$ ou $cl\,(u)$, avec:*

$$\dot{u} = \{v \in E/u\Re v\} \text{ (on peut écrire } v\Re u \text{ car } \Re \text{ est symétrique).}$$

**Exemple 1.6** *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow 3 \text{ divise } (x-y)\,.$$

*Alors:*

$$\begin{aligned}
\dot{2} &= \{x \in \mathbb{Z} \text{ tel que: } x\Re 2\}\,, \\
x\Re 2 &\Leftrightarrow 3 \text{ divise } (x-2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-2 = 3k, \\
&\Leftrightarrow x = 3k+2, \\
&\Leftrightarrow \dot{2} = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, ...\}\,.
\end{aligned}$$

**Remarque 1.2** *Si $a \in \dot{x}$ alors $\dot{a} = \dot{x}$.*

**Preuve:** (1) Si $v \in \dot{a} \Rightarrow v\Re a$ mais $a \in \dot{x}$ alors $a\Re x$, par transitivité $v\Re x$, ce qui implique que: $v \in \dot{x}$, c'est-a-dire: $\dot{a} \subset \dot{x}$.

(2) Si $v \in \dot{x} \Rightarrow v\Re x$ mais $a \in \dot{x}$ alors $x\Re a$, par transitivité $v\Re a$, ce qui implique que: $v \in \dot{a}$,c'est-a-dire: $\dot{x} \subset \dot{a}$. ■

### 1.2.3 Ensemble quotient

**Définition 1.7** *L'ensemble quotient de $E$ par $\Re$ est l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\Re$ et se note $\frac{E}{\Re}$ ou $E\ /\Re$.*

**Proposition 1.1** *L'ensemble quotient constitue **une partition** de $E$.*

**Preuve:** (1) Puisque $\Re$ est réflexive on a:$\forall u \in E, u\ \Re u$ alors $u \in \dot{u}$, ce qui implique que:

$$\forall u \in E, \dot{u} \neq \emptyset.$$

(2) On a: $\underset{u \in E}{\cup} \dot{u} = E$.
Car les $\dot{u}$ sont des sous ensembles de $E$, donc $\cup\dot{u} \subset E$ et chaque élément $u \in E$ vérifie $u\Re u$ (la réflexivité) donc $u \in \dot{u} \subset \cup\dot{u}$, ce qui implique que: $E \subset \cup\dot{u}$.
(3) Enfin si $\dot{u} \neq \dot{v}$ alors $\dot{u} \cap \dot{v} = \emptyset$ car s'il existe un élément $a \in \dot{u} \cap \dot{v}$ on aura $a\Re u$ et $v\Re a$ d'où $v\Re u$ car la relation est transitive. Ainsi $\dot{u} = \dot{v}$ (contradiction). ■

## 1.3 Relation d'ordre

### 1.3.1 Définition d'une relation d'ordre

**Définition 1.8** *Une relation définie dans un ensemble $E$ est dite une relation **d'ordre** si elle est:*
*Réflexive, antisymétrique et transitive.*

**Exemple 1.7** *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:*

$$p\Re q \Leftrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^n = q\right).$$

*En effet* $\forall p, q, r \in \mathbb{N}^*$*:*

*(1) La réflexivité, on a:*

$$p^1 = p \Rightarrow p\Re p \Rightarrow \Re \text{ est réflexive.}$$

*(2) L'antisymétrie: Si* $p\Re q$ *et* $q\Re\, p$ *alors:*

$$\begin{aligned} \exists n_1, n_2 &\in \mathbb{N}^*, p^{n_1} = q \text{ et } q^{n_2} = p, \\ &\Rightarrow q^{n_1 n_2} = q \Rightarrow n_1 n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1, \\ &\Rightarrow p = q \Rightarrow \Re \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

*(3) La transitivité: Si* $p\Re q$ *et* $q\Re\, r$ *alors:*

$$\begin{aligned} \exists n_1, n_2 &\in \mathbb{N}^*, p^{n_1} = q \text{ et } q^{n_2} = r, \\ &\Rightarrow p^{n_1 n_2} = r, \\ &\Rightarrow \left(\exists m = n_1 n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^m = r\right), \\ &\Rightarrow p\Re r \Rightarrow \Re \text{ est transitive.} \end{aligned}$$

*Conclusion:*

$\Re$ *est une relation d'ordre car elle est reflexive, antisymétrique et transitive.*

### 1.3.2 L'ordre total et l'ordre partiel

**Définition 1.9** *Soit* $\Re$ *une relation d'ordre définie sur un ensemble* $E$*, alors si pour tous* $u, v \in E$*, on a ou bien* $u\Re v$ *ou* $v\Re u$*, on dira que l'ordre est* ***total,*** *si non c'est-à-dire:*

$$\exists u, v \in E \text{ tel que on a ni } u\Re v \text{ ni } v\Re u.$$

*Alors* $\Re$ *est un ordre partiel.*

**Exemple 1.8** *Soit* $\Re$ *la relation définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par:*

$$p\Re q \Leftrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^n = q\right).$$

$\Re$ *est un ordre partiel car: pour* $p = 2$ *et* $q = 3$ *on ni* $2\Re 3$ *ni* $3\Re 2$.

### 1.3.3 Majorants - Minorants

**Définition 1.10** *Soit* $E$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre* $\Re$*, alors:*
*(1)* $M$ *est un majorant de* $E$*, si* $\forall u \in E, u\Re M$.
*(2)* $m$ *est un minorant de* $E$*, si* $\forall u \in E, m\Re u$.

### 1.3.4 La borne supérieure - La borne inférieure

**Définition 1.11** *Soit* $E$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre* $\Re$*, alors la borne supérieure d'un ensemble* $E$ *est le plus petit des majorants, notée* $\sup E$ *. D'autre part la borne inférieure est le plus grand des minorants, notée* $\inf E$*. Autrement on a:*
*(1)* $\forall M$ *un majorant de* $E$*,* $(\sup E)\, \Re M$.
*(2)* $\forall m$ *un minorant de* $E$*,* $m\Re (\inf E)$.

### 1.3.5 Maximum - minimum

**Définition 1.12** *Soit* $E$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre* $\Re$*, alors si la borne supérieure d'un ensemble* $E$ *appartient à* $E$*, alors l'élément maximal (maximum ou le plus grand élément de l'ensemble) existe et il est égal à la borne supérieure de* $E$*, si non le maximum n'existe pas. D'autre part si la borne inférieure d'un ensemble* $E$ *appartient à* $E$*, alors l'élément minimal (minimum ou le plus petit élément de l'ensemble) existe et il est égal à la borne inférieure de* $E$*, si non le minimum n'existe pas.*
*On note le maximum par:* $\max E$ *et le minimum par:* $\min E$.

**Exemple 1.9** *Dans* $I = [2, 5[$ *muni d'une relation d'ordre* $\Re$ *définie par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow x \leq y.$$

*(1) l'ordre est total et on a par exemple:*

$$7 \text{ est un majorant de } I \text{ et } 3 \text{ est un minorant de } I.$$

*(2) On a:* $\sup I = 5$ *et* $\inf I = 2$.

*(3) De plus:* $\sup I = 5 \notin I \Rightarrow \max I$ *n'existe pas et* $\inf\ I = 2 \in I \Rightarrow \min I = \inf I = 2$.