Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 1

Examen de rattrapage : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts). Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\star)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad f(xy) = f(x)f(y) \qquad (\star\star)$$

1) Montrer que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n$.
3) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad f(r) = r$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \geq 0$.
5) En déduire que f est une fonction croissante.

Exercice 2. (4 Pts)
Montrer que l'équation

$$xe^{\sin(x)} = \cos(x)$$

admet une solution unique dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3. (6 Pts).
On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence de la façon suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) Montrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique en précisant la raison et le premier terme.
2) En déduire l'expression de $(v_n - u_n)$ en fonction de n.
3) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
4) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.
5) On pose (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 3u_n + 8v_n$.
a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
b) En déduire la limite l de (u_n) et (v_n).

Exercice 4. (5 Pts).
Soit la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x + e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ \sin(x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2) f est-elle dérivable en 0 ?
3) f' est-elle continue en 0?
4) f est-elle deux fois dérivable en 0?

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts)

1) Comme f n'est pas nulle, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$, tel que $f(\alpha) \neq 0$.
D'après $(\star\star)$, on a $f(\alpha) = f(1.\alpha) = f(1).f(\alpha)$.
Ainsi,

$$f(\alpha)[f(1) - 1] = 0.$$

Puisque $f(\alpha) \neq 0$, alors $f(1) = 1$. **(0.5 Pt)**
Aussi, d'après $(\star)$, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Ceci implique que $f(0) = 0$. **(0.5 Pt)**

2) Montrons la propriété par récurrence sur n. Soit $P(n) : f(n) = n$.
Pour $n = 0$, on a $f(0) = 0$. **(0.25 Pt)**
Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang n et montrons que $f(n+1) = n+1$. **(0.25 Pt)**
En utilisant $(\star)$,

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = n + 1. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) Soit $r \in \mathbb{Q}^+$. Alors $r = \frac{p}{q}$ **(0.5 Pt)** avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant $(\star\star)$, on a

$$qf(\frac{p}{q}) = f(q)f(\frac{p}{q}) = f(q.\frac{p}{q}) = f(p) = p. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$. **(0.5 Pt)**

4) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. D'après $(\star\star)$, on a

$$f(x) = f(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = f(\sqrt{x}).f(\sqrt{x}) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

5) Supposons que $x \leq y$. Alors pour $y - x \geq 0$, on a $f(y - x) \geq 0$. **(0.5 Pt)**
D'après $(\star)$,

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x) \geq f(x). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, f est croissante.

Exercice 2. (4 Pts).

Posons $f(x) = xe^{\sin(x)} - \cos(x)$. **(0.25 Pt)**
On remarque que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ **(0.25 Pt)** et on a

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi e}{2} > 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, **(0.5 Pt)** f possède au moins une racine dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. **(0.25 Pt)**
D'autre part, on a

$$f'(x) = (1 + x\cos(x))e^{\sin(x)} + \sin(x). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Remarquons que tous les termes de $f'(x)$ sont positifs pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. **(0.5 Pt)** Donc, $f'(x) > 0$. **(0.25 Pt)**
Ceci implique qu'il existe un unique c tel que $f(c) = 0$. **(0.5 Pt)**

Exercice 3. (6 Pts).

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n}{12} = \frac{v_n - u_n}{12}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $v_0 - u_0 = 11$. **(0.5 Pt)**

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_1 - u_1 = \frac{1}{12}(v_0 - u_0) = \frac{1}{12}.11$$
$$v_2 - u_2 = \frac{1}{12}(v_1 - u_1) = \left(\frac{1}{12}\right)^2.11$$
$$.$$
$$.$$
$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{12}\right)^n.11. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Supposons que cette dernière propriété est vrai pour un certain rang n et montrons que $v_{n+1}-u_{n+1} = \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}.11$.

Remarquons que

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^n.11.\frac{1}{12}$$
$$= \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}.11 \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n.11 > 0.$$

Donc, (u_n) est croissante. **(0.5 Pt)**

On a aussi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = u_n - v_n$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n.11.$$

Donc, (v_n) est décroissante. **(0.5 Pt)**

4) On a

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Puisque (u_n) est croissante et v_n est décroissante, alors (u_n) et v_n sont adjacentes. **(0.5 Pt)**
Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

5) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3(\frac{u_n + 2v_n}{3}) + 8(\frac{u_n + 3v_n}{4})$$
$$= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = w_n.$$

Donc, w_n est une suite constante. $\quad$ **(0.5 Pt)**

b) D'après $a)$ on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n &= w_0 = 3u_0 + 8v_0 \\ &= 3 + (8.12) = 99\end{aligned}$$

Donc,

$$99 = 3u_n + 8v_n. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Quand $n \to +\infty$, on obtient

$$99 = 3l + 8l = 11l \Rightarrow l = 9. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 4. (5 Pts). 1) Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x + e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, (la composition des fonctions simples) de dérivée $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ **(0.5 Pt)**

Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée $f'(x) = \cos(x)$. $\quad$ **(0.5 Pt)**

2) On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 1. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. $\quad$ **(0.5 Pt)**

3) Comme

$$\lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \cos(x) = 1, \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

alors f' est continue en 0. $\quad$ **(0.5 Pt)**

4) On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, f est deux fois dérivable en 0. $\quad$ **(0.5 Pt)**