الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen Algérie جامعة آبي بكر بلقايد تلمسان الجزائر

Faculté des sciences – Département de Mathématiques.

Module : Algèbre 1 / RATTRAPAGE.

1ère Année MI 2021-2022. (Durée : 1H30 mn).

N.B. L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST STRICTEMENT INTERDIT.

EXERCICE 01 : **(07 POINTS)**

Soit Φ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \,\Phi\, y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \; tel\ que : \; x = ky.$$

Remarque : ***Ecrire les définitions pour chaque réponse.***

(1) **(1.5 Point)** Cet ordre est-il total ?

(2) **(4 Points)** Déterminer, s'ils existent $\sup\{4,16\}$, $inf\{4,16\}$, $\sup\{3,5\}$ $et\ inf\{3,5\}$.

(3) **(1.5 Point)** Soit $\Re$ une relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :
$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \,\Re\, y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \; tel\ que : \; x = ky.$
$\Re$ est-elle une relation d'ordre ?

EXERCICE 02 : **(05 POINTS)**

Soient E un ensemble non vide et F une partie non vide de E. Dans $P(E)$, ensemble des parties de E, on définit la relation d'équivalence $\Re$ par :

$$\forall A, B \in P(E), A \Re B \Leftrightarrow A \cap F = B \cap F.$$

(1) **(1.5 Point)** Déterminer $cl(\phi)$, classe d'équivalence de l'ensemble vide.

(2) **(1 Point)** A-t-on : $E \in cl(\phi)$? Justifier.

(3) **(2.5 Points)** Déterminer $cl(E)$. En déduire $cl(F)$.

EXERCICE 03 : (08 POINTS)

Soit f définie par :

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \ .$$

(1) (1 Point) Trouver E pour que f soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

(2) (4 Points) Calculer les limites, la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

(3) (1.5 Point) f est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

(4) (1.5 Point) Soit g une application définie par :

$$g : H \to K$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \ .$$

Donner 3 cas (des intervalles $H\ et\ K$) à partir du tableau des variations où g est bijective.

BON COURAGE ET BON VACANCES.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

Rattrapage Algèbre 1 - MI - 2021-2022. Durée :

"Le corrigé "

Exercice 01 : **(7 points)** Soit $\Re$ la relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = ky.$$

(1) Cet ordre est-il total ? Justifier.

L'ordre est total si et seulement si :

$$\forall x,y \in \mathbb{N}, x\Re y \text{ ou } y\Re x. \ \textbf{(0.5 point)}$$

L'ordre est partiel **(0.25 point)** car pour 2 et 3 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (2 \neq k \times 3) \text{ et } (3 \neq k \times 2) \text{ ,alors ni } 2\Re 3 \text{ ni } 3\Re 2. \ \textbf{(0.75 point)}$$

(2) Déterminons, s'ils existent $\sup\{4,16\}, \inf\{4,16\}, \sup\{3,5\}$ et $\inf\{3,5\}$.

(0.5 point) $16\Re 4 \Rightarrow \sup\{4,16\} = 4$ et $\inf\{4,16\} = 16$. **(0.5 point)**

a) M est un majorant de $B = \{3,5\} \Leftrightarrow \forall x \in B, x\Re M.$ **(0.25 point)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\Re M \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, 3 = k_1 M, \\ 5\Re M \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, 5 = k_2 M, \end{cases} \ \textbf{(0.5 point)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = 1 \text{ ou } M = 3, \text{ (les produits avec } k_1 \text{ pour avoir 3)} \\ M = 1 \text{ ou } M = 5 \text{(les produits avec } k_2 \text{ pour avoir 5).} \end{cases} \ \textbf{(0.25 point)}$$

Alors le seul majorant de B est : 1.**(0.25 point)** (l'intersection des deux cas).

$\Rightarrow \sup\{3,5\} = 1.$**(0.25 point)**

b) m est un minorant de $A = \{3,5\} \Leftrightarrow \forall x \in A, m\Re x.$**(0.25 point)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\Re 3 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = k_1 3, \\ m\Re 5 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = k_1 5. \end{cases} \ \textbf{(0.5 point)}$$

Alors les minorants de A sont les multiples de 15. **(0.25 point)**
D'autre part :

$$\textbf{(0.25 point)} \ \forall m = k_3 15, m\Re 15 \Rightarrow \inf\{3,5\} = 15. \textbf{(0.25 point)}$$

(3) $\Re$ est-elle une relation d'ordre si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$? Justifier.

Pour la relation:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}, x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = ky.$$

(1 point) Elle n'est pas antisymétrique car :

$$x\Re y \text{ et } y\Re x \Leftrightarrow [\exists k_1 \in \mathbb{Z}, x = k_1 y] \text{ et } [\exists k_2 \in \mathbb{Z}, y = k_2 x]$$
$$\Rightarrow x = k_1 k_2 x \Rightarrow k_1 k_2 = 1$$
$$\Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \text{ ou } k_1 = k_2 = -1. \left(\text{les } k_i \in \mathbb{Z}\right)$$

Alors par exemple **(0.5 point)** :

$$2\Re(-2) \text{ et } (-2)\Re 2 \text{ mais } 2 \neq -2.$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$ **(0.25 point)**

(2) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-2} - \frac{(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}} \times x}{x^2-x-2} = \frac{-x-4}{(x^2-x-2)\sqrt{x^2-x-2}} < 0.$$ **(1 point)**

Le signe :

$$\xrightarrow{-\infty \quad + \quad -4 \quad - \quad +\infty}$$ **(0.5 point)**

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||		||	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \simeq 0{,}94$	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $+\infty$	$\searrow$	1

(1.5 point)

(3) ~~(1.5 point)~~ f est-elle injective? surjective?

a) D'après le tableau des variations :

$$\exists x_1 \in]-\infty,-4[, \exists x_2 \in]-4,-1[, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

donc f n'est pas injective. **(0.5 point)**

b) D'après le tableau des variations

1) D'après le tableau des variations l'ensemble des images est $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, **(0.5 point)** alors f n'est pas surjective car pour :

Pour $y = 0, \forall x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[, f(x) \neq y$ **(0.5 point)**.

(4) **(1.5 point)** Soit g une application définie par :

$$g : H \to G$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Donner 3 cas (des intervalles H et G) à partir du tableau des variation où g est bijective

Il suffit de prendre par exemple :

(1) $H =]-\infty,-4]$ et $G = \left]-1, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right]$.

(2) $H = [-4,-1[$ et $G = \left]-\infty, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right]$.

(3) $H =]2,+\infty[$ et $G =]1,+\infty[$.

Exercice 02 : (4 points)

(1) Déterminons $Cl(\varnothing)$.

$$cl(\varnothing) = \{A \in P(E)/AR\varnothing\},$$ **(0.25 point)**

$$AR\varnothing \Leftrightarrow A \cap F = \varnothing \cap F \Rightarrow A \cap F = \varnothing,$$ **(0.5 point)**

$$\Rightarrow A \in P(C_E^F)$$ **(0.25 point)**

$$\Rightarrow cl(\varnothing) = \{A/A \in P(C_E^F)\}.$$ **(0.5 point)**

(2) A-t-on : $E \in Cl(\varnothing)$? Justifier. **(1 point)**

$E \notin Cl(\varnothing)$ car s'il existe un $A = E \in P(C_E^F) \Rightarrow F = \varnothing$ ce qui contredit l'hypothèse.

(3) Déterminons $Cl(E)$. En déduire $Cl(F)$.

$$cl(E) = \{A \in P(E)/ARE\},$$ **(0.25 point)**

$$ARE \Leftrightarrow A \cap F = E \cap F \Rightarrow A \cap F = F,$$

$$\Rightarrow A = F \cup B \text{ tel que : } B \in P(C_E^F),$$ **(0.5 point)**

alors :

$$cl(E) = \left\{A/A = F \cup B \text{ tel que : } B \in P(C_E^F)\right\},$$ **(0.5 point)**

mais pour :

$$B = \varnothing \in P(C_E^F) \Rightarrow F \in cl(E),$$ **(0.75 point)**

ce qui implique que :

$$cl(F) = cl(E) = \left\{A/A = F \cup B \text{ tel que : } B \in P(C_E^F)\right\}.$$ **(0.5 point)**

Exercice 03 : (8 points)

Soit f une application définie par :

$$f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.$$

(1) Trouvons E pour que f soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

f est une application $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! y \in \mathbb{R}, f(x) = y.$ **(0.25 point)**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - x - 2 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[.$$ **(0.75 point)**

(2)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = -1.$$ **(0.25 point)**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = 1.$$ **(0.25 point)**

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$ **(0.25 point)**