Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021/2022
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MI

Examen final de Mécanique

Exercice : 1 (exercice du contrôle) 10 Pts

1ère partie : 07 Pts

Une particule est lancée avec une vitesse initiale horizontale v_0 selon les équations, en fonction du temps, suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = v_0 t} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2} g t^2} \end{cases}$$

Où g est l'accélération de la pesanteur et v_0 est constante.
Déterminer :

1. L'équation de la trajectoire
2. Les composantes de la vitesse et de l'accélération et leurs modules.
3. Les accélérations: tangentielle a_T et normale a_N et en déduire le rayon de courbure
4. La nature du mouvement

2eme partie : 03 Pts

Soit le pendule simple formé d'une boule de rayon R. L'étude de l'effet de l'air sur ce pendule montre que sa période dépend **d'une constante sans dimensions k**, du coefficient de l'air η, du **rayon de la boule R** et de sa **masse volumique $\boldsymbol{\rho}$** .

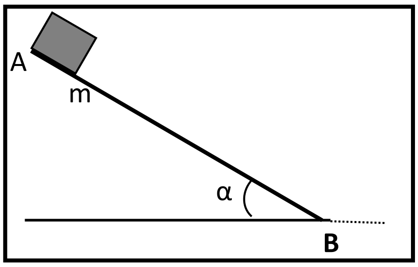
Trouvez l'expression de **la période T** en la supposant de la forme :

$$T = K\eta^x R^y \rho^z \text{ avec } [\boldsymbol{\eta}] = \boldsymbol{ML^{-1}T^{-1}}$$

Exercice 2 :05 pts

A. Une particule de masse m =1 kg abandonnée **sans vitesse initiale** du point A, d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontal, avec **un coefficient de frottement μ=0,6** et une gravité g=10 m/s²

-Que doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps puisse descendre.



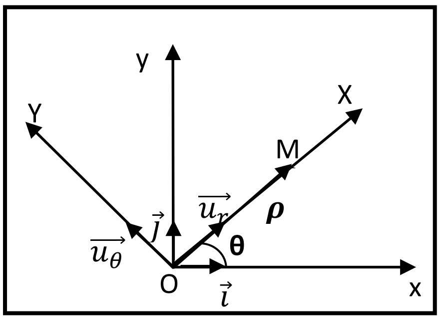
B. Pour un angle d'inclinaison $\boldsymbol{\alpha = 45°}$ et une longueur **AB=2m.** Calculer, en appliquant **le principe fondamentale de la dynamique**, :

- La force de Frottement $\vec{f}$
- La vitesse au point B.

Exercice 3 :05 pts

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



B) Le point M se déplace sur l'axe (OX), d'un repère (OXYZ) qui tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dans le plan (Oxy) tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = t^2\overrightarrow{u_r}}$ **.**

- Calculer la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$.
- Déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.

Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021/2022

1ère Année LMD-MI

Corrigé de l'Examen final de Mécanique

(EXERCICE DU CONTROLE) :10 Pts

1ère partie : 07 Pts

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

1- L'équation de la trajectoire s'écrit alors

Ici, on va écrire t en fonction, de x : $t = \frac{x}{v_0}$ (0,5 pts)

donc $y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2} \boldsymbol{x^2}$

L'équation de la trajectoire est $\mathbf{y(x)} = \frac{g}{2v_0^2} \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ (0,5 pts)

2- Les composantes de la vitesse

$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = gt \end{cases}$ (0,5 pts) La vitesse s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = v_0 \vec{\mathbf{i}} + gt\,\vec{\mathbf{j}}$,

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$ (0,5 pts)

3- Les composantes de l'accélération

$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = g \end{cases}$ (0,5 pts) L'accélération s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{a(t)}} = \mathbf{g}\vec{\mathbf{j}}$;

Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = g$(0,5 pts)

4- La nature du movement

$\overrightarrow{a(t)}.\overrightarrow{v(t)} = v_0(0) + gt(g) = g^2 t > 0$ (0,5 pts)

Le mouvement dans ce cas est uniformément accéléré (0,5 pts)

5- les accélérations normales et tangentielles

-L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\overrightarrow{v(t)}|}{dt}$ (0,5 pts) avec $|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$ donc $a_T = \frac{d(\sqrt{v_0^2+g^2t^2})}{dt} = \frac{2g^2 t}{2\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

$$a_T = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v} \text{ (0,5 pts)}$$

-L'accélération normale

Les accélérations a_N et a_T sont les composantes normales et tangentielles de l'accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N}) \Rightarrow a^2 = a_T^2 + a_N^2$ Donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$ (0,5 pts)

$$a_N^2 = g^2 - \left(\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\right)^2 = g^2 - \frac{g^4t^2}{v_0^2+g^2t^2} \Rightarrow a_N^2 = \frac{g^2v_0^2 + g^4t^2 - g^4t^2}{v_0^2+g^2t^2}$$

Donc $a_N = \sqrt{\frac{g^2v_0^2}{v_0^2+g^2t^2}} = \frac{gv_0}{v}$ (0,5 pts)

6- Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{gv_0}{v} \text{ (0,5 pts)} \Rightarrow R = \frac{v^3}{gv_0} = \frac{(v_0^2+g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{gv_0} \text{ (0,5 pts)}$$

<u>2eme partie : 03 Pts</u>

La période d'une pendule s'écrit :

$T = K\eta^x R^y \rho^z$ avec $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$

Supposons que la relation est homogène donc $[T] = [k][\eta]^x[R]^y[\rho]^z$ (0,5 pts)

Avec $\begin{cases} [\eta] = ML^{-1}T^{-1} \\ [R] = L \quad et \quad [k] = 1 \\ [\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} \\ [T] = T \end{cases}$ (1 pt)

Donc $[T] = (ML^{-1}T^{-1})^x L^y (ML^{-3})^z = T$

$$\Rightarrow T = M^xL^{-x}T^{-x} \; L^y \; M^z L^{-3z} \quad \text{(0,5 pts)}$$

$$\Rightarrow M^0L^0T^1 = M^{x+z} \; L^{-x+y-3z} \; T^{-x}$$

$Par\ identification$: $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -x = 1 \end{cases}$ (0,5 pts)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = x + 3z = 2 \\ z = -x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow T = K\eta^{-1}R^2\rho^1$ (0,5 pts) Donc $\boldsymbol{T = k\frac{\rho R^2}{\eta}}$

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021/2022

1ère Année LMD-MI

<u>Exercice 2 :05 pts</u>

A . 1- **L'angle pour lequel le corps peut descendre** <u>(2pts)</u>

A l'équilibre nous avons

$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = \vec{0}$ (0.25pts)

On choisit le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc suivant $\overrightarrow{R_N}$.

Suivant (Ox) : -f + m g sinα=0 (0.25pts)

Suivant (Oy): N-p_y=0⇒ N=m g cosα (0.25pts)

Avec μ_s=tgφ=f/N⇒ $\mu_s = \frac{f}{N}$=0.6 Donc f= 0,6 N=0,8 m g cosα (0.25pts)

Pour que le corps peut descendre, il faut que : m g sinα ≥f (0.25 pts)

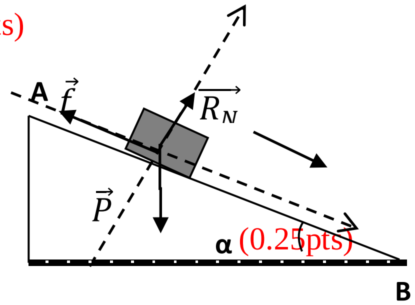
m g sinα ≥f ⇒ m g sinα ≥0,6 m g cosα (0.25 pts)

donc tg α≥0,6(0.25 pts) Alors que **α ≥ 30,96** (0.25 pts)

1- **Vitesse au point B** <u>(3pts)</u>

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB) \Rightarrow v_B^2 = 2a(AB)$; v_A=0 (0.25 pts)

En appliquant le PFD : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$ (0.5pts)



Suivant (Ox) – f +p_x= -f + m g sinα=ma….(1)(0.25pts)

Suivant (Oy) N-p_y=0⇒ N=m g cosα……(2) (0.25pts)

AN: N=5$\sqrt{2}$ **N** (0.25pts)

μ_d=tgφ=f/N⇒ f=N μ donc f= μ_d m g cosα (0.25pts)

AN: f=3$\sqrt{2}$ **N** (0.25pts)

(1): - μ_d m g cosα + m g sinα=ma⇒a=g(sinα- $\mu_d$cosα) (0.25pts)

AN: a=2$\sqrt{2}$ **N m/s²** (0.25pts)

$v_B^2 = 2a(AB) = 2 .\ 2\sqrt{2}(2) = 8\sqrt{2}$ et v_B= 3,36 m/s (0.25 pts)

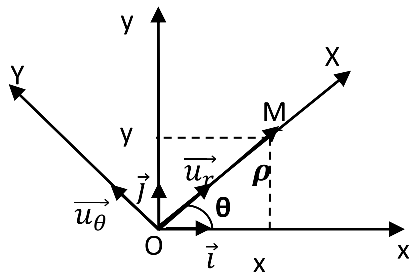
<u>EXERCICE 2 : 05 Pts</u>

A. Les relations de passage entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de ρ et θ et $\overrightarrow{u_\rho}$et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$) **(<u>03 Pts</u>)**

1. La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ (01 pt)

2. L'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}\ et\ \overrightarrow{U_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$.



$\overrightarrow{OM}/pol = \rho\vec{U}_r$ (0,5 pts)

$\overrightarrow{OM}/cart = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} = \rho(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$ (0,5 pts)

Par identification $\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$ (01 pt)

B . $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = t^2\overrightarrow{u_r}}$ Calculons la vitesse relative, d'entrainement et absolue (<u>02 Pts)</u>

- Vitesse relative :

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(OXY)$ (0,25 pts) $= \frac{d(t^2)}{dt}\overrightarrow{U_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_r}$ (0,25 pts)

- Vitesse d'entrainement :

  $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$(0,25 pts)

$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ (0,25 pts)donc $\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{-U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \boldsymbol{t^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-\omega\boldsymbol{t^2})\ \overrightarrow{U_y}$ Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega\ \boldsymbol{t^2}\ \overrightarrow{U_y}$ (0,5 pts)

- Vitesse absolue :

  $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$(0,25 pts) $= 2t\overrightarrow{U_x} + \omega\ \boldsymbol{t^2}\ \overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)