Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 1

Examen final : Analyse 1

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (6 Pts)
Soit f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par

$$f(x)=\ln(x+2)-x.$$

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions c_1 et c_2 telles que $-2<c_1<0<c_2$.

Exercice 2. (5 Pts)
On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$u_0=-1 \qquad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}.$$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad u_n\geq 0$.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{3}-u_{n+1}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n}.$$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq\sqrt{3}$.
4) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
5) Que peut-on conclure ?

Exercice 3. (4 Pts)
On définit f la fonction réelle suivante

$$f(x)=\frac{|x+1|}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Peut-on prolonger f par continuité en -1 ?

Exercice 4. (5 Pts)
Soit f la fonction réelle définit par

$$f(x)=\begin{cases} e^x-a & \text{si } \; x<0,\\ b\ln(1+x) & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, ensuite dérivable sur $\mathbb{R}$.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

1ère année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen final : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (6 Pts).

On a $f(x) = \ln(x+2) - x, \quad x \in]-2, +\infty[$.

Remarquons que $f'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = \frac{-1-x}{x+2}$. Alors $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. **(0.5 Pt)** Donc, sur $]-2, -1]$, la fonction f est strcitement croissante. **(0.5 Pt)** sur $[-1, +\infty[$, la fonction f est strictement décroissante. **(0.5 Pt)**

D'autre part, on a

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty \quad \mathbf{(0.25Pt)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x \left[\frac{\ln(x+2)}{-x} + 1 \right] = -\infty. \quad \mathbf{(0.25Pt)}$$

Ainsi,

Sur $]-2, -1]$, on a

- f est continue sur $]-2, -1]$. **(0.5 Pt)**
- $(\lim_{x \to -2} f(x)).f(-1) = -\infty < 0$ **(0.5 Pt)**
- f est strictement croissante.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists! c_1 \in]-2, -1]$. **(0.5 Pt)**

Sur $[-1, 0]$. Puisque $f(-1) = 1$ et $f(0) = \ln(2) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution. **(1 Pt)**

Sur $[0, +\infty[$, on a

- f est continue sur $[0, +\infty[$. **(0.5 Pt)**
- $f(0).(\lim_{x \to +\infty} f(x)) = -\infty < 0$ **(0.5 Pt)**
- f est strictement décroissante.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists! c_2 \in [0, +\infty[$. **(0.5 Pt)**

Exercice 2. (5 Pts).

On a

$$u_0 = -1 \qquad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}.$$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = \frac{3+2u_0}{2+u_0} = \frac{3-2}{2-1} = 1 > 0$.

Supposons que $u_n \geq 0$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

Puisque $u_n \geq 0$, alors $3 + 2u_n \geq 0$ et $2 + u_n \geq 0$. Donc,

$$u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} \geq 0.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$. **(1 Pt)**

2) On a

$$\sqrt{3} - u_{n+1} = \sqrt{3} - \frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}u_n - 3 - 2u_n}{2+u_n} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

3) Remarquons que pour $n = 0$, $u_0 = -1 < \sqrt{3}$. Pour cela, supposons que $u_n \leq \sqrt{3}$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.
On sait d'après la deuxième question que

$$\sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n}.$$

Puisque $2-\sqrt{3} > 0$ et $\sqrt{3} \geq u_n$, alors $\sqrt{3} - u_{n+1} \geq 0$. **(1 Pt)**
4) La montonie de u_n. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3+2u_n}{2+u_n} - u_n = \frac{3-u_n^2}{2+u_n} \geq 0. \qquad (3 \geq u_n^2).$$

Donc, (u_n) est une suite croissante. **(1 Pt)**

5) On remarque que puisque la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge. **(1 Pt)**

Exercice 3. (4 Pts).
On a $f(x) = \frac{|x+1|}{(x+1)(x^2-x+1)}$.
1) Le domaine de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car $x^2 - x + 1 > 0$. **(0.5 Pt)**
2) On a

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1, \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases} \qquad \textbf{(1Pt)}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1} = \frac{1}{3}, \quad \textbf{(1Pt)}$$

et

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-x-1}{(x+1)(x^2-x+1} = -\frac{1}{3}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Puisque $\lim_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$, alors f ne peut pas être prolongeable par continuité en -1. **(0.5 Pt)**

Exercice 4. (5 Pts).
On a

$$f(x) = \begin{cases} e^x - a & \text{si } x < 0, \\ b\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Remarquons que la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. **(0.5 Pt)**
La continuité en 0 :
On a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x - a = 1 - a \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} b\ln(1+x) = 0. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc, pour que f soit continue en 0, il faut que $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$. **(0.5 Pt)**
D'autre part, remarquons que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. **(0.5 Pt)**

La dérivabilité en 0 :
On a
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{b\ln(1+x)}{x} = b \quad (\mathbf{1Pt})$$
et
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1. \quad (\mathbf{1Pt})$$
Ainsi, pour que f soit dérivable en 0, il faut que $b=1$. $\quad$ **(0.5 Pt)**
Donc, $a=1$ et $b=1$.