Epreuve Finale Algèbre 1 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.

Exercice 01 : (**8 points**) Soit Φ une relation binaire définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^n = x.$$

Remarque : **Ecrire les définitions pour chaque réponse**.

(**1**) (**2.5 points**) Montrer que Φ est une relation d'ordre.

(**2**) (**1.5 point**) Cet ordre est-il total ?

(**3**) (**4 points**) Soit l'ensemble $A = \{3,5,7\}$. Déterminer s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $\sup A, \inf A, \max A$ et $\min A$ pour l'ordre Φ.

Solution : Soit Φ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^n = x.$$

(**1**) Montrons que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.

a) Φ est-elle réflexive?

Φ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}^*, x\Phi x.$ (**0.25 point**)

$\forall x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists n = 1 \in \mathbb{N}, x^1 = x \Rightarrow x\Phi x \Rightarrow \Phi$ est réflexive.(**0.25 point**)

b) Φ est-elle antisymétrique?

Φ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{N}^*, x\Phi y$ et $y\Phi x \Rightarrow x = y.$ (**0.25 point**)

Soient $x,y \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \text{si } x\Phi y \text{ et } y\Phi x &\Rightarrow \exists n_1,n_2 \in \mathbb{N}, y^{n_1} = x \text{ et } x^{n_2} = y, \\ &\Rightarrow x^{n_2} = (y^{n_1})^{n_2} = y \\ &\Rightarrow n_1n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1 \\ &\Rightarrow x = y, (\textbf{0.75 point}) \end{aligned}$$

ce qui implique que Φ est antisymétrique.

c) Φ est-elle transitive?

Φ est transitive $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathbb{N}^*, x\Phi y$ et $y\Phi z \Rightarrow x\Phi z.$ (**0.25 point**)

Soient $x,y,z \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x\Phi y \text{ et } y\Phi z &\Rightarrow \exists n_1,n_2 \in \mathbb{N}, y^{n_1} = x \text{ et } z^{n_2} = y, \\ &\Rightarrow (z^{n_2})^{n_1} = x, \\ &\Rightarrow \exists n_3 = n_1n_2 \in \mathbb{N}, z^{n_3} = x \\ &\Rightarrow x\Phi z, (\textbf{0.75 point}) \end{aligned}$$

donc Φ est transitive.

Conclusion : Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.

(**2**) Cet ordre est-il total ?

L'ordre est total si et seulement si :

$$\forall x,y \in \mathbb{N}^*, x\Phi y \text{ ou } y\Phi x. \textbf{(0.5 point)}$$

L'ordre n'est pas total car pour les deux entiers 2 et 3 on a ni $2\Phi 3$, ni $3\Phi 2$. (**1 point**)

(**3**) Soit l'ensemble $A = \{3,5,7\}$. Déterminons s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $\sup A, \inf A, \max A$ et $\min A$ pour l'ordre Φ.

M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A, x\Phi M$, (**0.25 point**)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\Phi M \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}, M^{n_1} = 3 \Rightarrow M = 3, \textbf{(0.25 point)} \\ 5\Phi M \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}, M^{n_2} = 5 \Rightarrow M = 5, \textbf{(0.25 point)} \\ 7\Phi M \Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N}, M^{n_3} = 7 \Rightarrow M = 7, \textbf{(0.25 point)} \end{cases}$$

alors l'intersection des trois cas implique que l'ensemble des majorants est vide (**0.5 point**). Donc :

$\sup A$ n'existe pas (**0.25 point**) et $\max A$ n'existe pas (**0.25 point**).

D'autre part m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A, m\Phi x$, (**0.25 point**)

$$\Rightarrow \begin{cases} m\Phi 3 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}, 3^{n_1} = m \Rightarrow m \in \{1,3,9,27,\ldots\}, \textbf{(0.25 point)} \\ m\Phi 5 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}, 5^{n_2} = m \Rightarrow m \in \{1,5,25,125,\ldots\} \textbf{(0.25 point)} \\ m\Phi 7 \Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N}, 7^{n_3} = m \Rightarrow m = \{1,7,47,\ldots\} \textbf{(0.25 point)} \end{cases}$$

$\Rightarrow m = 1$ (**0.5 point**) (l'intersection entre les trois cas).

Donc :

$\inf A = 1 \notin A$ (**0.25 point**) $\Rightarrow \min A$ n'existe pas.(**0.25 point**)

Exercice 02 : (**3 points**) On définit dans $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\Re$ par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x - |x| = y - |y|.$$

(**1**) (**2 points**) Déterminer la classe d'équivalence du réel a.

(**2**) (**1 point**) Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\Re$.

Solution : On définit dans $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\Re$ par:

$$x\Re y \Leftrightarrow x - |x| = y - |y|.$$

(**1**) Déterminons la classe d'équivalence d'un réel a.

$$cl(a) = \{x \in \mathbb{R}/x\Re a\}. \textbf{(0.5 point)}$$

$$x\Re a \Rightarrow x - |x| = a - |a|. \textbf{(0.25 point)}$$

1er cas: Si $a \geq 0$ alors $x - |x| = 0$ d'où $x \in \mathbb{R}^+$. (**0.25 point**)
2ème cas: Si $a < 0$ alors $x - |x| = 2a$ d'où $x < 0$ ce qui donne que $x = a$. (**0.25 point**)
Conclusion:

$$cl(a) = \begin{cases} [0,+\infty[\text{ si } a \geq 0 \textbf{ (0.5 point)} \\ \{a\} \text{si } a < 0. \textbf{(0.25 point)} \end{cases}$$

(**2**) Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\Re$.

$$\mathbb{R}/\Re = \{[0,+\infty[\} \cup \{\{a\}/a < 0\}. \textbf{(1 point)}$$

Exercice 03 : (**3 points**) Soit f une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Utiliser la méthode de la définition.

(**1**) (**0.75** + **0.75 point**) f est-elle injective? surjective?

(**2**) (**3** × **0.5 point**) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses? Justifier.

(**a**) $f(\{0\}) = -3$, (b) $f^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 1$, (c) $f^{-1}\left(\left\{\frac{-3}{\sqrt{10}}\right\}\right) = \{3\}$.

Solution : Soit f une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(**1**) f est-elle injective? surjective?

a) f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. (**0.25 point**)

$1 \neq -1$ et $f(1) = f(-1) = \frac{-3}{\sqrt{2}} \Rightarrow f$ n'est pas injective (**0.5 point**).

b) f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$. (**0.25 point**)

Pour $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y \Rightarrow f$ n'est pas surjective (**0.5 point**).

(**2**) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses? Justifier.

$$(a)\, f(\{0\}) = -3,$$

est fausse (**0.25 point**) car :

$$f(\{0\}) = \{-3\}. \text{ (0.25 point)}$$

$$(b)\, f^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 1,$$

est fausse (**0.25 point**) car f n'est pas bijective donc $f^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ n'existe pas (**0.25 point**).

$$(c)\ f^{-1}\left(\left\{\frac{-3}{\sqrt{10}}\right\}\right) = \{3\},$$

est fausse (**0.25 point**) car :

$$(c)\ f^{-1}\left(\left\{\frac{-3}{\sqrt{10}}\right\}\right) = \{-3, 3\}. \text{ (0.25 point)}$$

Exercice 04 : (**6 points**) Soit f une application définie par :

$$f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(**1**) (**0.75 point**) Trouver E pour que f soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

(**2**) (**2 points**) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

(**3**) (**1.5 point**) f est-elle injective? surjective?

(**4**) (**0.75 point**) Soit g une application définie par :

$$g \; : \; H \to G$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Donner un cas (des intervalles H et G) à partir du tableau des variation où g est bijective (Justifier votre réponse).

(**5**) (**1 point**) Trouver dans ce cas l'application inverse.

Solution : Soit f une application définie par :

$$f \; : \; E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

(**1**) Trouvons E pour que f soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

f est une application $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! y \in \mathbb{R}, f(x) = y.$ (**0.25 point**)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$ (**0.5 point**)

(**2**) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} < 0.$$ (**0.5 point**)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -1.$$ (0.25 point)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1.$$ (0.25 point)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	1

(**1 point**)

(**3**) (**1.5 point**) f est-elle injective? surjective?

a) (**0.5 point**) D'après le tableau des variations :

$$\forall x_1, x_2 \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

donc elle est injective.

b) D'après le tableau des variations

1) D'après le tableau des variations l'ensemble des images est $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, (**0.5 point**) alors f n'est pas surjective car pour :

Pour $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$ (**0.5 point**).

(**4**) (**0.75 point**) Soit g une application définie par :

$$g \; : \; H \to G$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Donner un cas (des intervalles H et G) à partir du tableau des variation où g est bijective (Justifier votre réponse).

Il suffit de prendre par exemple :

$H =]-\infty,-1[$ et $G =]-\infty,-1[$.

(**5**) (**1 point**) Trouver dans ce cas l'application inverse.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$
$$\Rightarrow y^2(x^2 - 1) = x^2 \Rightarrow x^2(y^2 - 1) = y^2$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 1} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{y^2}{y^2 - 1}}$$ (L'autre cas c'est plus)

Conclusion :

$$f^{-1} \; : \;]-\infty,-1[\; \to \;]-\infty,-1[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{y^2}{y^2 - 1}}.$$