Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 1

Contrôle continu : Analyse 1

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts)

On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

$$A = \left\{ \frac{1}{x-1}, \quad x \geq 2 \right\}.$$

1) Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de A. Justifier.
2) A possède-t-elle un maximum, un minimum ? Justifier.

Exercice 2. (5 Pts)

Soit x un nombre réel. On note par $E(x)$ la partie entière de x et on définit par $\overline{E}(x)$ la partie entière supérieure de x définie par $\overline{E}(x) = \min\{k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq x\}$.

1) Calculer $E(1.2), E(-1.5)$ et $\overline{E}(1.2), \overline{E}(-1.5)$.
2) Pour tout entier naturel n pair, calculer $E\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\overline{E}\left(\frac{n}{2}\right)$.
3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E\left(\frac{n}{2}\right) + \overline{E}\left(\frac{n}{2}\right) = n.$$

Exercice 3. (10 Pts)

I) On considère les nombres complexes suivants

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i, \qquad z_2 = 2 + 2i \qquad \text{et} \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1) Écrire z sous la forme algébrique.
2) En calculant la forme trigonométrique de z_1 et z_2, donner la forme trigonométrique de z.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $z^n + \frac{1}{z^n}$ et en déduire la valeur exacte de $z^{1980} + z^{-1980}$.

II) Soit $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer x et y tel que

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

2) En déduire les solutions de

$$\left(\frac{w+i}{w-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3},$$

où w est un nombre complexe.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵏ ⴱⵓⴱⴽⵔ ⴱⵍⵇⴰⵢⴷ ⵜⵍⵎⵙⴰⵏ
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé du contrôle continu : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts)

1) Remarquons que

$$x \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 1$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x-1} \leq 1. \qquad (\mathbf{0.5Pt})$$

Montrons que $\sup A = 1$.
On a $\forall x \geq 2, \quad \frac{1}{x-1} \leq 1$, donc A est majorée. Ainsi, la borne supérieure existe.
Puisque 1 est un majorant donc, $\sup A \leq 1$.
D'autre part, $1 \in A$ (il suffit de remplacer par $x = 2$), donc $1 \leq \sup A$.
Ainsi, $\sup A = 1$. **(1.5 Pts)**
Montrons que $\inf A = 0$.
C'est à dire

$$\begin{cases} \forall x \geq 2, \quad \frac{1}{x-1} > 0 & ....(1), \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \geq 2, / \quad \frac{1}{x-1} < \varepsilon & ....(2) \end{cases}$$

La première (1) est évidente. Pour la deuxième, on a

$$\frac{1}{x-1} < \varepsilon \Rightarrow x-1 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Donc, on peut choisir $x = \frac{1}{\varepsilon} + 2$.
Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x = \frac{1}{\varepsilon} + 2, / \quad \frac{1}{x-1} < \varepsilon. \qquad (\mathbf{2Pts})$$

2) Remarquons que $1 \in A$, donc,

$$\sup A = \max A = 1. \qquad (\mathbf{0.5Pt})$$

Par contre, $0 \notin A$, donc, le minimum n'existe pas. **(0.5 Pt)**

Exercice 2. (5 Pts)

1) On a $E(1.2) = 1$, **(0.25 Pt)** $\overline{E}(1.2) = 2$ **(0.5 Pt)** et $E(-1.5) = -2$, **(0.25 Pt)** $\overline{E}(-1.5) = -1$ **(0.5 Pt)**

2) Pour n pair, on a $n = 2p, \quad p \in \mathbb{N}$.
Ainsi,

$$E(\frac{n}{2}) = E(\frac{2p}{2}) = E(p) = p. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

et

$$\overline{E}(\frac{n}{2}) = \overline{E}(\frac{2p}{2}) = \overline{E}(p) = p. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) Remarquons que pour $n = 2p$,

$$E(\frac{n}{2}) + \overline{E}(\frac{n}{2}) = p + p = 2p = n. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Maintenant, pour n impair, on a $n = 2p+1, \quad p \in \mathbb{N}$. Donc,

$$E(\frac{n}{2}) + \overline{E}(\frac{n}{2}) = E(\frac{2p+1}{2}) + \overline{E}(\frac{2p+1}{2})$$

$$= E(p+\frac{1}{2}) + \overline{E}(p+\frac{1}{2}) = p+p+1 = 2p+1 = n. \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E\left(\frac{n}{2}\right) + \overline{E}\left(\frac{n}{2}\right) = n. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 3. (10 Pts)

I) 1) La forme algébrique de z.

On a

$$z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2+2i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) La forme trigonométrique de z.

On a $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{6}i$. Alors,

$$|z_1| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

et $\theta_1 = arg(z_1)$ vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

D'où,

$$z_1 = \sqrt{8}\left[\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right]. \quad (\mathbf{0.5Pts})$$

Pour $z_2 = 2+2i$, on a $|z_2| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad (\mathbf{0.25\ Pt})$ et $\theta_2 = arg(z_2)$ vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

D'où

$$z_2 = \sqrt{8}\left[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right]. \quad (\mathbf{.5Pt})$$

Alors,

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \quad (\mathbf{0.5Pt}) \quad \text{et} \quad \theta = arg(z) = \theta_1 - \theta_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{12} + 2\pi k \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, la forme trigonométrique de z est donnée par

$$z = \cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) Remarquons que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + z^{-n} = \left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)^n + \left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)^{-n}$$

$$= \cos(\frac{n\pi}{12}) + i\sin(\frac{n\pi}{12}) + \cos(\frac{-n\pi}{12}) + i\sin(\frac{-n\pi}{12})$$

$$\cos(\frac{n\pi}{12}) + i\sin(\frac{n\pi}{12}) + \cos(\frac{n\pi}{12}) - i\sin(\frac{n\pi}{12}) = 2\cos(\frac{n\pi}{12}). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi,

$$z^{1980} + z^{-1980} = 2\cos(\frac{1980\pi}{12}) = 2\cos(165\pi) = -2. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

II) Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
On a

$$(x+iy)^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 2\sqrt{2} > 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{0.5Pt})$$

D'autre part,

$$|z^2| = |-2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ xy > 0. \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Donc,

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad (\mathbf{0.5Pt}) \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

2) On pose $z = \frac{w+i}{w-i}$. On a

$$z = \frac{w+i}{w-i} \Leftrightarrow z(w-i) = w + i$$

$$\Leftrightarrow zw - iz - w - i = 0$$

$$\Leftrightarrow w(z-1) = i(1+z)$$

$$\Leftrightarrow w = i\frac{1+z}{z-1}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Il y a deux solutions

$$w_1 = i\frac{1+1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

et

$$w_2 = i(\frac{1-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}-1}) = \frac{2\sqrt{3}}{7} + \frac{3}{7}i. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$