Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1 Contrôle continu " sujet 1".
1ère Année MI 2021-2022.

Question 01 : (3 points) Soient P, Q et R trois propositions.
Dresser la table de vérité de la proposition suivante :

$$(A) : \left[\left(R \Rightarrow \overline{P}\right) \wedge Q\right] \Rightarrow \left[\left(P \vee \overline{R}\right) \Leftrightarrow Q\right].$$

On note par :

$$(B) : \left(R \Rightarrow \overline{P}\right) \wedge Q \text{ et } (C) : \left(P \vee \overline{R}\right) \Leftrightarrow Q.$$

P	Q	R	$\overline{P}$	$\overline{R}$	$R \Rightarrow \overline{P}$	$P \vee \overline{R}$	(B)	(C)	(A)
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1

Les 5 dernières colonnes chacune → **(0.5 point)** + (**0.5 point** pour les autres ensembles)

Question 02 : (2 points) Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall A, B \in P(E), \exists C \in P(E); A \cup B = C \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{C}.$$

La négation est : **(0.5 point)**

$$\exists A, B \in P(E), \forall C \in P(E); (A \cup B = C) \wedge \left(\overline{A} \not\subseteq \overline{C}\right).$$

La proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.
La proposition est fausse **(0.5 point)** car pour : (**1 point pour le reste)**

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2, 3\}, E = \{1, 2, 3, 4\}.$$

On a :

$$\overline{A} = \{3, 4\}, \overline{C} = \{4\},$$

donc :

$$\exists A, B \in P(E), \forall C \in P(E); (A \cap B = C) \wedge \left(A \not\subseteq \overline{C}\right).$$

Question 03 : (3 points) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, -m^2 - y^2 < -2.$$

La proposition est vraie **(0.5 point)** car :

$$-m^2 - y^2 < -2 \Rightarrow -m^2 < y^2 - 2 \Rightarrow m^2 > 2 - y^2.$$

1er cas : **(1 point)** Si $2 - y^2 \leq 0$ il suffit de prendre par exemple $n = 1$.
2ème cas : Si $2 - y^2 > 0$:

$$m^2 > 2 - y^2 \Rightarrow m > \sqrt{2 - y^2}, \textbf{(0.75 point)}$$

alors il suffit de prendre $n = E\left(\sqrt{2 - y^2}\right) + 1$.**(0.75 point)**

Question 04 : (3 points) On montre par récurrence que :
(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^n + 9n - 1$ est un multiple de 13 (est divisible par 13) .(R_n)

1ère étape: pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} &5^1 + (9 \times 1) - 1 = 13 = 1 \times 13, \\ &\Rightarrow 5^1 + (9 \times 1) - 1 \text{ est un multiple de } 13, \\ &\Rightarrow R_1 \text{ est vraie. } \textbf{(1 point)} \end{aligned}$$

2ème étape: On suppose que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé (l'hypothèse de récurrence) c'est-à-dire:

$$5^n + 9n - 1 \text{ est un multiple de } 13 \Leftrightarrow 5^n + 9n - 1 = 13k, k \in \mathbb{N},$$

et montrons que (R_{n+1}) est vraie, c'est-à-dire :

$$5^{n+1} + 9(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 13.\textbf{(ICI donner 0.5 point)}$$

En effet:

$$\begin{aligned} &5^{n+1} + 9(n+1) - 1 = 5 \times 5^n + 9n + 9 - 1 \\ &= (1 + 4) \times 5^n + 9n - 1 + 9 \\ &= (5^n + 9n - 1) + 4 \times 5^n + 9 \text{ ici donnez une note complète } \textbf{(1.5 point)} \end{aligned}$$

Question 05 : (3 points)

1) Soit $F = \{v, w\}, v \neq w$.

a) Déterminer $\wp(F)$ (l'ensemble des parties de F).

$\wp(F) = \{\emptyset, \{v\}, \{w\}, F\}$**(0.25 point)**

b) Déterminer $\wp(\wp(F))$.**(0.75 point)**

$$\wp(\wp(F)) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{v\}\}, \{\{w\}\}, \{F\}, \{\emptyset, \{w\}\}, \{\emptyset, \{w\}\}, \{\emptyset, F\}, \{\{v\}, \{w\}\}, \{\{v\}, F\}, \\ \{\{w\}, F\}, \{\emptyset, \{w\}, \{6\}\}, \{\emptyset, \{w\}, F\}, \{\emptyset, \{w\}, F\}, \{\{v\}, \{w\}, E\}, \wp(F) \end{array} \right\}.$$

2) Soit $E = \{4, 6, 13\}$.

a) Déterminer $\wp(E)$ ensemble des parties de E.

$\wp(E) = \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{13\}, \{4,6\}, \{4,13\}, \{6,13\}, E\}$.**(0.5 point)**

b) Compléter les propositions suivantes par les symboles: $\in, \notin, \subset, \not\subset$.
$\{4,13\} \in \wp(E)$; $6 \notin \wp(E)$; $\{\varnothing\} \subset \wp(E)$; $\varnothing \in \wp(E)$; $\{4,5\} \not\subset E$; $\{7\} \notin \wp(E)$.**(6 × 0.25 point)**

Question 06 : (3 points) Montrons que:

$$C_E^H \subset C_E^G \Leftrightarrow G \cup H = H.$$

" $\Rightarrow$ "
a) Montrons que: $G \cup H \subset H$?**(1.25 point)**
Si

$$\begin{aligned} x &\in G \cup H \Rightarrow \begin{cases} x \in G \Rightarrow x \notin C_E^G \Rightarrow x \notin C_E^H \Rightarrow x \in H, \\ \text{ou } x \in H, \end{cases} \\ &\Rightarrow x \in H. \end{aligned}$$

b) $H \subset G \cup H$ évident **(0.25 point)**
" $\Leftarrow$ " Montrons que:$C_E^H \subset C_E^G$?.**(1.5 point)**

$$\begin{aligned} \text{Si } x &\in C_E^H \text{ alors } x \notin H \Rightarrow x \notin G \cup H, \\ &\Rightarrow x \notin G \Rightarrow x \in C_E^G. \end{aligned}$$

Question 07 : (3 points) Montrons que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*; \sqrt{m+1} + \sqrt{m} \notin \mathbb{N}.$$

Par l'absurde on suppose que :

$$\begin{aligned} \sqrt{m+1} + \sqrt{m} &= \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{m+1} = \alpha - \sqrt{m} \textbf{ (0.5 point)} \\ &\Rightarrow m+1 = \left(\alpha - \sqrt{m}\right)^2 \Rightarrow m+1 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{m} + m \\ &\Rightarrow 1 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{m} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \textbf{(0.5 point)} \\ &\Rightarrow m = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} \textbf{(0.5 point)} \\ &\Rightarrow 4m\alpha^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 \\ &\Rightarrow \alpha^4 - (2+4m)\alpha^2 + 1 = 0 \, (\alpha, m \in \mathbb{N}), \textbf{(0.5 point)} \end{aligned}$$

Si on pose $X = \alpha^2$, on a :

$$X^2 - (2+4m) X + 1 = 0$$

$$\triangle = (2+4m)^2 - 4 = 16m^2 + 16m > 0 \textbf{(0.5 point)}$$

donc :

$$X_1 = \frac{(2+4m) - \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(2+4n) - 4\sqrt{m^2+m}}{2} = (1+2m) - 2\sqrt{m^2+m} \notin \mathbb{N}. \textbf{(0.25 point)}$$

et

$$X_1 = \frac{(2+4m)+\sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(2+4m)+4\sqrt{m^2+m}}{2} = (1+2m)+2\sqrt{m^2+m} \notin \mathbb{N}.$$ **(0.25 point)**

car si :

$$\begin{aligned}
X_1, X_2 &\in \mathbb{N} \Rightarrow (X - X_1)(X - X_2) = X^2 - (2+4m)X + 1 \\
&\Rightarrow X_1 \times X_2 = 1 \Rightarrow X_1 = X_2 = 1 \\
&\Rightarrow (1+2m) - 2\sqrt{m^2+1} = 1 \\
&\Rightarrow 2(m - \sqrt{m^2+1}) = 0 \text{ et } 2(m + \sqrt{m^2+1}) = 0 \\
&\Rightarrow (m - \sqrt{m^2+1}) = 0 \text{ et } (m + \sqrt{m^2+1}) = 0
\end{aligned}$$

ce qui est absurde.