Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1 Contrôle continu " sujet 1".
1ère Année MI 2021-2022.

Question 01 : (3 points) Soient P, Q et R trois propositions.
Dresser la table de vérité de la proposition suivante :

$$(A) : \left[\left(R \Leftrightarrow \overline{P}\right) \vee Q\right] \Rightarrow \left[(P \wedge Q) \Rightarrow \overline{R}\right].$$

On note par :

$$(B) : \left(R \Leftrightarrow \overline{P}\right) \vee Q \text{ et } (C) : (P \wedge Q) \Rightarrow \overline{R}.$$

P	Q	R	$\overline{P}$	$\overline{R}$	$R \Leftrightarrow \overline{P}$	$P \wedge Q$	(B)	(C)	(A)
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

Les 5 dernièrs colonnes chacune $\rightarrow$ **(0.5 point)** + (**0.5 point** pour les autres ensembles)

Question 02 : (2 points) Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall A, B \in P(E), \exists C \in P(E); A \cap B = C \Rightarrow A \subset \overline{C}.$$

La négation est : **(0.5 point)**

$$\exists A, B \in P(E), \forall C \in P(E); (A \cap B = C) \wedge \left(A \not\subset \overline{C}\right).$$

La proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.
La proposition est fausse **(0.5 point)** car pour : (**1 point pour le reste)**

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{2\}, E = \{1, 2, 3, 4\}.$$

On a :

$$\overline{C} = \{1, 3, 4\},$$

donc :

$$\exists A, B \in P(E), \forall C \in P(E); (A \cap B = C) \wedge \left(A \not\subset \overline{C}\right).$$

Question 03 : (3 points) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n^2 - x^2 > -1.$$

La proposition est vraie **(0.5 point)** car :

$$n^2 - x^2 > -1 \Rightarrow n^2 > x^2 - 1.$$

1er cas : **(1 point)** Si $x^2 - 1 \leq 0$ il suffit de prendre par exemple $n = 1$.
2ème cas : Si $x^2 - 1 > 0$:

$$n^2 > x^2 - 1 \Rightarrow n > \sqrt{x^2 - 1}, \textbf{(0.75 point)}$$

alors il suffit de prendre $n = E\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) + 1.$**(0.75 point)**

Question 04 : (3 points) On montre par récurrence que :
(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 7^n + 6n - 1$ est un multiple de 12 (est divisible par 12) .(R_n)

1ère étape: pour $n = 1$:

$7^1 + (6 \times 1) - 1 = 12 = 1 \times 12,$
$\Rightarrow 7^1 + (6 \times 1) - 1$ est un multiple de 12,
$\Rightarrow R_1$ est vraie. **(1 point)**

2ème étape: On suppose que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé (l'hypothèse de récurrence) c'est-à-dire:

$$7^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 12 \Leftrightarrow 7^n + 6n - 1 = 12k, k \in \mathbb{N},$$

et montrons que (R_{n+1}) est vraie, c'est-à-dire :

$$7^{n+1} + 6(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 12.\textbf{(ICI donner 0.5 point)}$$

En effet:

$7^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 7 \times 7^n + 6n + 6 - 1$
$= (1 + 6) \times 7^n + 6n - 1 + 6$
$= (7^n + 6n - 1) + 6 \times 7^n + 6$
$= 12k + 6 \times 7^n + 6$ (l'hypothèse de récurrence)
$= 12k + 6(12k - 6n + 1) + 6 = 12(k + 6k - 3n + 1) = 9 \times k',$
$\Rightarrow 7^{n+1} + 6(n+1) - 1$ est un multiple de 12,

$\Rightarrow (R_{n+1})$ est vraie.**(1.5 point)**
Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 7^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 12.$$

Question 05 : (3 points)

1) Soit $E = \{a, b\}, a \neq b$.

a) Déterminer $\wp(E)$ (l'ensemble des parties de E).

$\wp(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$**(0.25 point)**

b) Déterminer $\wp(\wp(E))$.**(0.75 point)**

$$\wp(\wp(E)) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{E\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, E\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, E\}, \\ \{\{b\}, E\}, \{\emptyset, \{b\}, \{6\}\}, \{\emptyset, \{b\}, E\}, \{\emptyset, \{b\}, E\}, \{\{a\}, \{b\}, E\}, \wp(E) \end{array} \right\}.$$

2) Soit $F = \{8, 9, 11\}$.

a) Déterminer $\wp(F)$ ensemble des parties de F.

$\wp(F) = \{\emptyset, \{8\}, \{9\}, \{11\}, \{8,9\}, \{8,11\}, \{9,11\}, F\}$.**(0.5 point)**

b) Compléter les propositions suivantes par les symboles: $\in, \notin, \subset, \not\subset$.
$\{9,5\} \subset F; \{5\} \notin \wp(F); \{8,11\} \in \wp(F); 9 \notin \wp(F); \{\emptyset\} \subset \wp(F)$ et $\emptyset \in \wp(F)$.**(6 × 0.25 point)**

Question 06 : (3 points) Montrons que:

$$C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

" $\Rightarrow$ "
a) Montrons que: $A \cup B \subset B$?**(1.25 point)**
Si

$$\begin{aligned} x &\in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow x \in B, \\ \text{ou } x \in B, \end{array} \right. \\ &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

b) $B \subset A \cup B$ évident **(0.25 point)**
" $\Leftarrow$ " Montrons que:$C_E^B \subset C_E^A$?.**(1.5 point)**

$$\begin{aligned} \text{Si } x &\in C_E^B \text{ alors } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B, \\ &\Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in C_E^A. \end{aligned}$$

Question 07 : (3 points) Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}.$$

Par l'absurde on suppose que :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} &= \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n+1} = \alpha - \sqrt{n} \textbf{ (0.5 point)} \\ &\Rightarrow n+1 = \left(\alpha - \sqrt{n}\right)^2 \Rightarrow n+1 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{n} + n \\ &\Rightarrow 1 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \textbf{(0.5 point)} \\ &\Rightarrow n = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} \textbf{(0.5 point)} \\ &\Rightarrow 4n\alpha^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 \\ &\Rightarrow \alpha^4 - (2+4n)\alpha^2 + 1 = 0\,(\alpha, n \in \mathbb{N}), \textbf{(0.5 point)} \end{aligned}$$

Si on pose $X = \alpha^2$, on a :

$$X^2 - (2+4n)\,X + 1 = 0$$

$$\triangle = (2+4n)^2 - 4 = 16n^2 + 16n > 0 \textbf{(0.5 point)}$$

donc :

$$X_1 = \frac{(2+4n) - \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(2+4n) - 4\sqrt{n^2+n}}{2} = (1+2n) - 2\sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}.\textbf{(0.25 point)}$$

et

$$X_1 = \frac{(2+4n) + \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(2+4n) + 4\sqrt{n^2+n}}{2} = (1+2n) + 2\sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}.\textbf{(0.25 point)}$$

car si :

$$\begin{aligned}
X_1, X_2 &\in \mathbb{N} \Rightarrow (X - X_1)\,(X - X_2) = X^2 - (2+4n)\,X + 1 \\
&\Rightarrow X_1 \times X_2 = 1 \Rightarrow X_1 = X_2 = 1 \\
&\Rightarrow (1+2n) - 2\sqrt{n^2+1} = 1 \\
&\Rightarrow 2(n - \sqrt{n^2+1}) = 0 \text{ et } 2(n + \sqrt{n^2+1}) = 0 \\
&\Rightarrow (n - \sqrt{n^2+1}) = 0 \text{ et } (n + \sqrt{n^2+1}) = 0
\end{aligned}$$

ce qui est absurde.