Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2020/2021.
Mars 2021.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

Corrigé de l'examen final

Problème

Etant donné le pb parabolique suivant :

$$[1]_v \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + Bv & \text{ds }]0,T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad f \in L^2(0,T;V') \text{ où } V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \quad y_0 \in H$$

(V, H deux $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert)

$v \in \mathcal{U}_{ad} \subset L^2((0,T],\mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ étant un $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert), $A \in \mathcal{L}(V,V')$

$B \in \mathcal{L}\left(L^2((0,T],\mathcal{U}), L^2(0,T;V')\right) \Rightarrow B^* \in \mathcal{L}\left(L^2(0,T;V), L^2((0,T];\mathcal{U})\right)$.

On fait une observation finale (à l'instant $t=T$) et on détermine le contrôle optimal associé en minimisant la fction coût :

$$J(v) = \frac{1}{2}\left[|Dy(T,v) - y_d|_H^2 + \int_0^T \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}} dt \right] \quad \text{où } y_d \in H, \text{ indép. de } t$$

$N \in \mathcal{L}\left(L^2((0,T];\mathcal{U}), L^2((0,T],\mathcal{U})\right)$ avec N auto-adjoint et coercif sur $L^2((0,T],\mathcal{U})$ c.à.d. $\forall v_1, v_2 \in L^2((0,T],\mathcal{U})$ $\langle Nv_1(t), v_2(t)\rangle_{\mathcal{U}} = \langle v_1(t), Nv_2(t)\rangle_{\mathcal{U}}$ $\forall t \in (0,T]$

et $\forall v \in L^2((0,T],\mathcal{U})$ $\int_0^T \langle Nv(t), v(t)\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq \gamma \int_0^T \|v\|_{\mathcal{U}}^2 dt$ pour $\gamma > 0$

1) $y \in W(0,T) \subset \mathcal{C}^0([0,T],H) \Rightarrow y(T;v) \in H$

2) $D \in \mathcal{L}(H,H) \Rightarrow D^*$ (Adjoint de D) $\in \mathcal{L}(H',H') = \mathcal{L}(H,H)$ car $H' \equiv H$

3) $A \in \mathcal{L}(V,V') \Rightarrow A^*$ (Adjoint de A) $\in \mathcal{L}(V'',V') = \mathcal{L}(V,V')$ car le bidual $V'' = V$ car V réflexif car c'est 1 esp. de Hilbert.

4) L'application Appl : $v \mapsto Dy(T;v)$ est affine puisque $y(v)$ s'écrit, en fction de v, $y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ où $\mathcal{A} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} B$ et $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} f$

De plus si $t = T$ $y(T;v) = \mathcal{A}v(T) + \mathcal{B}$ et $Dy(T;v) = D(\mathcal{A}v(T) + \mathcal{B}) =$
$= D\mathcal{A}v(T) + D\mathcal{B}$.

car $D \in \mathcal{L}(H,H)$ Donc
$v \mapsto Dy(T;v) = \mathcal{A}'v(T) + \mathcal{B}'$ (où $\mathcal{A}' = D\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}' = D\mathcal{B}$) est affine

Par ailleurs, $v \xmapsto{\text{cont.}} f + Bv \xmapsto{\text{cont.}} y(v) = y(t,v) \xmapsto{\text{cont.}} y(T;v) \overset{\text{Ap. trace cont.}}{=} y(t,v)\big|_{t=T} \xmapsto{\text{cont.}} Dy(T;v)$.

est continue parceque c'est une composée de fonctions continues :

$v \mapsto f + Bv$ affine cont. en v $\left[B \in \mathcal{L}(L^2((0,T],\mathcal{U}), L^2(0,T;V'))\right]$ 0.25

$v \mapsto f + Bv \mapsto y(v)$ cont. car y dépend continûment des données $f + Bv$ 0.25

$v \mapsto y(T;v)$ cont. car $y \in \mathcal{C}^0([0,T],H)$ et en prolongeant $t \mapsto y(t,v)$ sur $[0,T]$, on obtient
(% à v) $\forall t \in [0,T] =]0,T]$ $v(t) \mapsto y(t;v)$ cont. % à $v \Rightarrow v \mapsto y(T;v)$ cont. % à v

Enfin $v \mapsto Dy(T,v)$ cont. car $D \in \underbrace{\mathcal{L}(H,H)}_{=\mathcal{L}(H)}$ et D est, ds ce cas, continue 0.25

5) 0.25

J est continue car composée de fonctions continues : $v \mapsto Dy(T,v) - y_d$ continue, la fction norme $v \mapsto |Dy(T,v) - y_d|_H^2$ cont. (puisque $\varphi \mapsto |\varphi|_H^2$ cont.)
$N \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;\mathcal{U})) \Rightarrow N$ continue et enfin la fonction produit scalaire $v \mapsto \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}}$ continue et $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle_{L^2(0,T],\mathcal{U})} = \int_0^T \langle v(t), w(t)\rangle_{\mathcal{U}} dt$ continue.

6)
$$J(v) \geq \frac{1}{2}\int_0^T \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt \geq \frac{\gamma}{2}\underbrace{\int_0^T \|v\|_{\mathcal{U}}^2 dt}_{\|v\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{U})}} \longrightarrow +\infty \text{ qd } \|v\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \longrightarrow +\infty$$

<u>Dc J est infinie à l'infini.</u>

7) On montre que $u \in \mathcal{U}_{ad} \underset{\text{convexe fermé}}{\subset} L^2((0,T],\mathcal{U})$ est sol. optimale unique du pb d'optimisation sous contraintes $J(u) = \inf J(v)$ sur $\mathcal{U}_{ad}$:

Selon l'indication, $\langle J'(v), w\rangle = \langle \mathcal{A}'w, Dy(T,v) - y_d\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$

Comme $\mathcal{A}'(w - v) = \mathcal{A}'w - \mathcal{A}'v = (\mathcal{A}'w + \mathcal{B}') - (\mathcal{A}'v + \mathcal{B}') = Dy(T,w) - Dy(T,v)$

Alors $\langle J'(v), w - v\rangle = \langle \mathcal{A}'(w-v), Dy(T,v) - y_d\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, w - v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$
$= \langle Dy(T,w) - Dy(T,v), Dy(T,v) - y_d\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, w - v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$ 0.5

Donc $\langle J'(v), v - w\rangle = \langle Dy(T,v) - y_d, Dy(T,v) - Dy(T,w)\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, v - w\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$ 0.5

et $\langle J'(w), v - w\rangle = \langle Dy(T,w) - y_d, Dy(T,v) - Dy(T,w)\rangle_H + \int_0^T \langle Nw, v - w\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$

$\Rightarrow \langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle = \langle Dy(T,v) - y_d - Dy(T,w) + y_d, Dy(T,v) - Dy(T,w)\rangle_H$ 0.5
$+ \int_0^T \langle N(v - w), v - w\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$ 0.5

$\Rightarrow \langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle \geq |Dy(T,v) - Dy(T,w)|_H^2 + \gamma \int_0^T \|v - w\|_{\mathcal{U}}^2 dt \geq 0$

$\Rightarrow J$ convexe.

De plus si $v \neq w$ $\langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle \geq \gamma \int_0^T \|v - w\|_{\mathcal{U}}^2 dt > 0$

$\Rightarrow J$ strictement convexe. 1pt

Donc J est continue, infinie à l'infini et strictement convexe
$\Rightarrow$ le pb de minimisation $\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ admet une sol. opt. unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$

8) Par rapport au contrôle optimal u la solution $y(u)$ de [1] s'écrit :

$$[1_u]\begin{cases}\dfrac{\partial y(u)}{\partial t}+Ay(u)=f+Bu & \text{ds }]0,T[.\ y(u)\in L^2(0,T;V)\\ y(0,u)=y_0\end{cases}$$

Multipliant alors l'équation ds $[1_u]$ par $\varphi\in V$ ds le prod. scalaire de la dualité V',V on obtient : $\left\langle\dfrac{\partial y(u)}{\partial t},\varphi\right\rangle_{V',V}+\langle Ay(u),\varphi\rangle_{V',V}=\langle f+Bu,\varphi\rangle_{V',V}$ ds $]0,T[$.

Ce qui permet d'écrire

$$[2]\begin{cases}y(u)\in L^2(0,T;V)\\ \left\langle\dfrac{\partial y(u)}{\partial t},\varphi\right\rangle_{V',V}+a(y(u),\varphi)=\langle f,\varphi\rangle_{V',V}+\langle Bu,\varphi\rangle_{V',V} & \text{ds }]0,T[\ \forall\varphi\in V\end{cases}$$

où $a(y(u),\varphi)=\langle Ay(u),\varphi\rangle_{V',V}$ 1pt

9) L'inéquation variationnelle s'écrit comme suit : $\langle J'(u),v-u\rangle\geq 0\ \forall v\in \mathcal{U}_{ad}$ 0.5

c.à.d. $\langle Dy(T,u)-y_d,Dy(T,v)-Dy(T,u)\rangle_H+\int_0^T\langle Nu,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\,dt\geq 0\ \forall v\in\mathcal{U}_{ad}$ 0.5

On introduit à présent l'équation de l'état adjoint

$$[3]\quad\begin{cases}-\dfrac{\partial p}{\partial t}+A^*p=0\\ p(T)=D^*(Dy(T)-y_d)\end{cases}$$

C'est l'équation parabolique rétrograde (avec condition finale)

10) Appliquant le changement de variables $t'=T-t$ ds [3] alors celui-ci est équivalent à [3'] :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t'}+A^*p=0\\ p(0)=D^*(Dy(0)-y_d)=D^*(Dy_0-y_d)\in H\end{cases}$$ 1pt car $y_0\in H$, $y_d\in H$ et $D,D^*\in\mathcal{L}(H,H)=\mathcal{L}(H)$

1pt On remarque que [3'] est du m̂ type que [1] qui est bien posé au sens d'Hadamard $\Longrightarrow$ [3] est aussi bien posé au sens d'Hadamard

11) $\langle J'(u),v-u\rangle=\langle Dy(T,u)-y_d,D(y(T,v)-y(T,u))\rangle_H+\int_0^T\langle Nu,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\,dt$

$=\langle D^*(Dy(T,u)-y_d),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H+\int_0^T\langle Nu,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\,dt$ 0.5

$\overset{\text{cond. fin. [3]}}{=}\langle p(T),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H+\int_0^T\langle Nu,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\,dt$ 0.25

Par ailleurs, $[3]\Rightarrow 0=\int_0^T\left\langle-\dfrac{\partial p}{\partial t}+A^*p,y(v)-y(u)\right\rangle_{V',V}dt=\int_0^T\left\langle-\dfrac{\partial p}{\partial t},y(v)-y(u)\right\rangle_{V',V}dt$

$+\int_0^T\langle p,A(y(v)-y(u))\rangle_{V,V'}\,dt=$

$=\int_0^T\left\langle p,\dfrac{\partial y(v)}{\partial t}-\dfrac{\partial y(u)}{\partial t}\right\rangle_{V,V'}dt-\langle p(T),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H+\overbrace{\langle p(0),\underbrace{y(0,v)}_{=y_0}-\underbrace{y(0,u)}_{=y_0}\rangle_H}^{=0}$ 0,75

$=\int_0^T\left\langle p,\left(\dfrac{\partial y(v)}{\partial t}+Ay(v)\right)-\left(\dfrac{\partial y(u)}{\partial t}+Ay(u)\right)\right\rangle_{V,V'}dt-\langle p(T),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H+\int_0^T\langle p,Ay(v)-Ay(u)\rangle_{V,V'}dt$

$=\int_0^T\langle p,f+Bv-f-Bu\rangle_{V,V'}\,dt-\langle p(T),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H$ 0,5

$=\int_0^T\langle p,B(v-u)\rangle_{V,V'}\,dt-\langle p(T),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H=\int_0^T\langle B^*p,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\,dt-\langle p(T),y(T,v)-y(T,u)\rangle_H$

$$\Longrightarrow \langle p(T), y(T,v)-y(T,u)\rangle_H = \int_0^T \langle B^* p, v-u\rangle_U \, dt.$$

Or $\langle J'(u), v-u\rangle = \langle p(T), y(T,v)-y(T,u)\rangle_H + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_U \, dt$ 0,5

$$= \int_0^T \langle B^* p, v-u\rangle_U \, dt + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_U \, dt$$

D'où le résultat final : $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_0^T \langle B^* p + Nu, v-u\rangle_U \, dt$

12) <u>Présentation du système d'optimalité</u> :

0,5 $\begin{cases} \dfrac{\partial y(u)}{\partial t} + Ay(u) = f + Bu \quad ds\ ]0,T[\\ y(0,u) = y_0 \end{cases}$

0,5 $\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p = 0 \quad ds\ ]0,T[\\ p(T) = D^*(Dy(T,u) - y_d) \end{cases}$

1 $\displaystyle\int_0^T \langle B^* p + Nu, v-u\rangle_U \, dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$

(u, y, p) est solution unique de ce système