0.1 Université de Tlemcen, Departement de mathématiques, Module:Théorie des semigroupes, Mars 2021, examen, durée 1h30'.

Exercice1.09 points

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ dans } \Omega \times R_+^* \\ u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Posons

$$S(t)v = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} < v, e_n > e_n.$$

Montrer que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C^o-semigroupe de contraction sur $L_2(\Omega)$.

solution:a) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C^o-semigroupe est déja vu dans le cours **(04 points)**.Pour établir la contraction **(02 points)** , il suffit de voir que

$$\|S(t)v\|^2 = e^{-2\lambda_n t} \sum_{n \geq 1} < v, e_n >^2 \leq \sum_{n \geq 1} < v, e_n >^2 = \|v\|^2$$

La continuité **(03 points)** se fait de la manière suivante:

$$\|S(t)v - v\|^2 = \sum_{n \geq 1} \left(e^{-\lambda_n t} - 1\right)^2 < v, e_n >^2 \leq \sum_{n=1}^{n=N} \left(e^{-\lambda_n t} - 1\right)^2 < v, e_n >^2 + \sum_{n \geq N} \left(e^{-\lambda_n t} - 1\right)^2 < v, e_n >^2$$

Faisons tendre t vers 0, dans le premier terme, et en prenant N assez grand dans le deuxième terme (le reste d'une série convergente), on peut rendre $\|S(t)v - v\|^2$ aussi petit que l'on veut.

Exercice 2.(06 points) Soit le problème

$$(1) \begin{cases} \frac{dv}{dt} = Av, \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

L'opérateur A engendre un C^o-semigroupe $S(t)$..Soient $T > 0$, arbitairement choisi, et v une solution de (1) .Posons

$$w(t) = S(T - t)v(t)$$

Calculer $\frac{dw}{dt}$.En déduire que $v = 0$ partout.

Solution:il est clair que **(04 points)**

$$\frac{dw}{dt} = S(T - t)v'(t) - AS(T - t)v = 0$$

comme

$$w(0) = 0 = w(T)$$

il s'ensuit que **(02 points)**

$$v(t) = 0, \text{ pour tout } t.$$

Exercice 3.(05 points) Soit la fonction

$$\Psi_t(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 2tx^2}}, \quad t \geq 0, \quad x \in R.$$

Montrer que Ψ_t est un C^o-semigroupe.

Solution: Remarquons que **(04 points)**

$$\Psi_t(\Psi_s(x)) = \frac{\Psi_s(x)}{\sqrt{1 + 2t\Psi_s(x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + 2(t+s)x^2}} = \Psi_{t+s}(x)$$

La limite (**01 point**)

$$\lim_{t \to 0} \Psi_t(x) = x.$$

Remarque:l'ex.3 est comptabilisé comme C.C.