Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020/2021
$1^{\text{ère}}$ année Master
Semestre 2

Examen De Rattrapage "Analyse de Survie"

Aucun document n'est autorisé
Durée : 1h30mn
27 Juin 2021

Exercice 1. (6pts)

On considère une variable aléatoire T décrivant une durée de vie ou de fonctionnement et on note S et h respectivement la fonction de survie et la fonction de risque associées.

1. Rappelez le lien entre S et h.
2. Démontrez que $\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty S(t)dt$.
3. Donner l'expression de $\mathbb{E}(T)$ dans le cas d'une loi de Weibull ($S(t) = e^{-t^\alpha}, \alpha > 0$).
4. Montrez que $d(e(t))/dt = -1 + e(t)h(t)$, où $e(t)$ désigne la fonction espérance de vie résiduelle.

Exercice 2. (4pts)

On considère une situation de censure aléatoire à droite :

$$X_i = T_i \wedge C_i \quad et \quad D_i = \begin{cases} 1 & si \quad T_i \leq C_i \\ 0 & si \quad T_i > C_i \end{cases}$$

dans laquelle on suppose les censures C_i indépendantes des durées T_i. On fait l'hypothèse qu'il existe $\theta > 0$ tel que $S_\theta(t) = 1/(1+t)^\theta$ pour tout $t \geq 0$.

1. Calculer la fonction de risque h_θ et la densité f_θ du modèle.
2. Calculer l'espérance de vie résiduelle et donner la condition sur θ pour que cette espérance existe.

Exercice 3. (10pts)

I- Voici la durée de vie de survie en jours de 21 patients atteints d'une infection virale :

$$6-6-6-6^+-7-9^+-10-10^+-11^+-13-16-17^+-19^+-20^+-22-23-25^+-32^+-32^+-34^+-35^+.$$

Déterminez et représentez le risque cumulé issu de l'estimateur de Nelson-Aalen.

II- On considère les durées (guérison en semaines) de patients à qui l'on a administré deux types de traitements :

* $\mathbf{G}_1$: $5 - 6 - 6^+ - 7 - 8 - 9^+ - 10$.

* $\mathbf{G}_2$: $1^+ - 2^+ - 4 - 5 - 5^+ - 6 - 7^+$.

Tester l'égalité des deux survies des deux groupes (test de **LOG-RANK**) à un risque $\alpha = 5$ %, conclure. ($\mathbb{P}(\chi_1^2 > 3.84) = 0.05$).

Bonne courage.

Correction Rattrapage "Analyse de Survie"

Exercice n° 1 :

(0,5) 1°/ $h(t) = -\dfrac{S'(t)}{S(t)}$ pour $t \geq 0$ ou bien $S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u)\,du\right)$.

(02) 2°/ M.q : $\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} S(t)\,dt$ (voir cours).

3°/ $S(t) = e^{-t^\alpha}$ $\alpha > 0$:

(02,5) $\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ posons $u = t^\alpha$ i.e $t = u^{1/\alpha}$

donc $dt = \dfrac{1}{\alpha} u^{1/\alpha - 1} du$.

Donc, $\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\dfrac{1}{\alpha} u^{1/\alpha - 1}\right) du$

$= \dfrac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} u^{1/\alpha - 1} e^{-u}\,du$.

$= \dfrac{1}{\alpha} \Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

(01) 4°/ $e(t) = \dfrac{1}{S(t)} \int_t^{+\infty} S(u)\,du$ donc,

$\dfrac{de(t)}{dt} = \dfrac{-S^2(t) - S'(t) \int_t^{+\infty} S(u)\,du}{S^2(t)} = -1 + \dfrac{-S'(t)}{S(t)} \cdot \dfrac{\int_t^{+\infty} S(u)\,du}{S(t)}$

Alors, $d\,e(t)/dt = -1 + h(t) \cdot e(t)$

Exercice n° 2 :

$S_\theta(t) = 1/(1+t)^\theta$, $\theta > 0$.

(01) 1°/ $h_\theta(t) = -\dfrac{S'(t)}{S(t)} = \dfrac{\theta}{(1+t)}$.

$f_\theta(t) = -S'_\theta(t) = h_\theta(t) \cdot S_\theta(t) = \dfrac{\theta}{(1+t)^{\theta+1}}$.

(03) 2°/ $e(t) = \dfrac{1}{S_\theta(t)} \int_t^{+\infty} S_\theta(u)\,du$

$= (1+t)^\theta (1-\theta)^{-1} \left[(1+u)^{1-\theta} \right]_t^{+\infty}$

cette esperance existe ssi $1-\theta < 0$ i.e $\theta > 1$, donc

pour $\theta > 1$: $e(t) = \dfrac{-(1+t)}{(1-\theta)}$

Exercice n° 3 :

1°/ (01pts) $\hat{H}_{NA}(t) = \sum_{i / t_i \leq t} \frac{d_i}{n_i}$

d_i : nombre de mort à t_i

n_i : nombre de sujets vivants au temps t_i

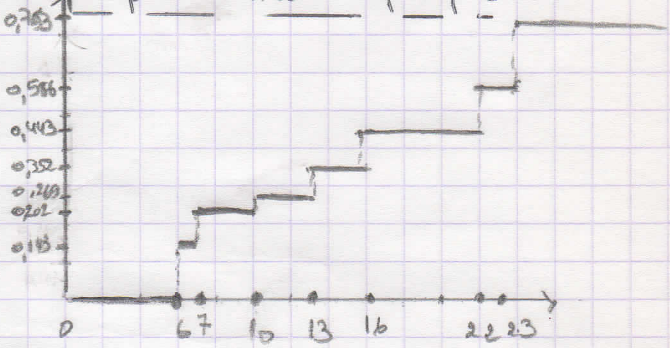
c_i : nombre de sujets censurés dans $[t_i, t_{i+1}[$.

$n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1}$.

(01.5pts)

t_i	c_i	d_i	n_i	$\hat{h}(t_i) = \frac{d_i}{n_i}$	$\hat{H}_{NA}$
0	0	0	21	0	0
6	1	3	21	0.143	0.143
7	1	1	17	0.059	0.202
10	2	1	15	0.067	0.269
13	0	1	12	0.083	0.352
16	3	1	11	0.091	0.443
22	0	1	07	0.143	0.586
23	5	1	06	0.167	0.753

" Représentation Graphique "



02,75

t_i	c_{1i}	d_{1i}	n_{1i}	c_{2i}	d_{2i}	n_{2i}	d_i	n_i	$e_{1i} = \frac{n_{1i} d_i}{n_i}$	$e_{2i} = \frac{n_{2i} d_i}{n_i}$
0	0	0	7	2	0	7	0	14	0	0
4	0	0	7	0	1	5	1	12	0.583	0.417
5	0	1	7	1	1	4	2	11	1.273	0.727
6	1	1	6	0	1	2	2	8	1.500	0.500
7	0	1	4	1	0	1	1	5	0,800	0,200
8	1	1	3	0	0	0	1	3	1.000	0.000
10	0	1	1	0	0	0	1	1	1.000	0.000
Σ		$O_1 = 5$			$O_2 = 3$		$d_{1i} + d_{2i}$		$E_1 = 6,156$	$E_2 = 1,844$

1°/ La statistique de "Log-Rank" $O_1 - E_1 = -1.156$ est négative, donc le traitement affecte favorablement le temps de survie des patients traités dans G_1. (02pts)

2°/ $T_n = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} = 0,712$. (0,5)

(05pts) Région de Rejet $D = [T_n > 3,84]$ car $\alpha = 5\%$.

comme, $\underset{0,25}{0,712 < 3,84}$ donc $\underbrace{\text{on accepte}}_{0,5}$ $\underbrace{H_0 : S_1 = S_2}_{01pts}$