Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2020-2021.

Master I : Probabilités-Statistiques
Module : Analyse Fonctionnelle II
Durée : 1h30

Examen Final

Exercice-01 **(07 points)**

I.

1. Étant donné une suite $(u_n)_n$ bornée dans $L^\infty(\Omega)$, qu'est ce qu'on peut déduire.
2. Citer le Théorème de Dunford-Pettis.

II.
Soit (E, A, μ) un espace mesuré et f, g deux fonctions mesurables positives de E dans $\mathbb{R}^+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\int_E f(x)d\mu \int_E g(x)d\mu \geq \mu(E)^2.$$

Exercice-02 **(07 points)**

Soit $\{f_n\}_n$ une suite dans $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n = n^3 \chi_{]0,\frac{1}{n^3}[} - n\chi_{]-\frac{1}{n},0[}$$

1. Tracer les courbes de f_1 et f_2.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_n$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
4. La suite $\{f_n\}_n$ converge-t-elle faiblement vers 0 pour $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$.
5. La suite converge-t-elle vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$.

Exercice-03 **(06 points)**

Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Soit a est une fonction mesurable sur Ω. Supposons que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$.
Démontrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec :

$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \text{si} \quad p < \infty. \\ q & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

Indication : Utiliser le théorème du graphe fermé.

Bon courage

Corrigé

Exercice-01 **(06 points)**

I.

1. Étant donné une suite $(u_n)_n$ bornée dans $L^\infty(\Omega)$, donc on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers u_0 pour la topologie $*\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ ...(01 point).
2. Théorème de Dunford-Pettis : [Voir le cours] ...(01 point).

II. Soit (E, A, μ) un espace mesuré et f, g deux fonctions mesurables positives de E dans $\mathbb{R}^+$ telles que $fg \geq 1$. On a $fg \geq 1$ ceci implique que $\sqrt{f}\sqrt{g} \geq 1$ donc $\displaystyle\int_E \sqrt{f}\sqrt{g}\, dx \geq \int_E dx$. En utilisant l'inégalité de Holder on obtient

$$\Big(\int_E g(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_E f(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \int_E \sqrt{fg}\, dx \geq \int_E dx = \mu(E)$$

Et par suite,

$$\Big(\int_E g(x)\, dx\Big)\Big(\int_E f(x)\, dx\Big) \geq \mu(E)^2 \qquad \dots \qquad \text{(04 points)}$$

Exercice-02 **(08 points)**

Soit $\{f_n\}_n$ une suite dans $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n & \text{si} \quad x \in]-\frac{1}{n}; 0[\\ n^3 & \text{si} \quad x \in]0; \frac{1}{n^3}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer les courbes de f_1 et f_2 .....(02 points).
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_n$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = n^3\chi_{]0,\frac{1}{n^3}[}(x) - n\chi_{]-\frac{1}{n},0[}(x) = 0$$

Alors $f_n \to 0$ p.p dans $\mathbb{R}$ .....(01 point).

3. Calculer $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \displaystyle\int |f_n(x)|\, dx = 2$ .....(02 points).
4. Quelque soit ϕ continue à support compact, on calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} < f_n, \phi >$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\phi(x)\, dx = -n\int_{\frac{-1}{n}}^0 \phi(x)\, dx + n^3\int_0^{\frac{-1}{n^3}} \phi(x)\, dx \to 0 \qquad n \to \infty.... \qquad \text{(02 points)}$$

Par densité des fonctions continue a support compact, f_n converge faiblement vers 0.

5. Pour $p \geq 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p\, dx = n^p\int_{\frac{-1}{n}}^0 dx + n^{3p}\int_0^{\frac{1}{n^3}} dx = n^{p-1} + n^{3(p-1)} \not\to 0 \qquad n \to \infty.... \qquad \text{(01 point)}$$

Donc f_n ne converge pas fortement vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$.

Exercice-03 **(06 points)**

Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Soit a est une fonction mesurable sur Ω. Supposons que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$.
Démontrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec :

$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \text{si} \quad p < \infty. \\ q & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

Indication : Utiliser le théorème du graphe fermé.

Considérons l'opérateur $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ définie par $Tu = au$. xxx que le graphe de T est fermé. En effet, soit $(u_n)_n$ est une suite dans $L^p(\Omega)$ telque

$$u_n \to u \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ et } Tu_n \to f \text{ dans } L^q(\Omega).$$

Donc a une sous suite

$$u_n \to u \qquad \text{p.p dans } \Omega.$$

Et

$$Tu_n \to f \qquad \text{p.p dans } \Omega.$$

Alors $f = Tu$. Par le théorème du graphe fermé que T est continue, alors il existe une constante positive C telque

$$\|Tu\|_q = \|au\|_q \leq C\|u\|_p \qquad \forall u \in L^p(\Omega)......\text{(02 points)}$$

Cas 01 : Si $p < \infty$ alors supposons $v = u^q$ alors

$$\int_\Omega a^q v\, dx \leq C^q \Big(\int_\Omega a^q v^{\frac{p}{q}} \Big)^{\frac{q}{p}} = C^q \|u\|_{\frac{q}{p}} \qquad \forall v \in L^{\frac{p}{q}}(\Omega).$$

Alors l'application $K : v \to Kv = \displaystyle\int_\Omega |a|^q v$ est continue et lineaire fonctionnelle de $L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$ et ceci implique alors que $|a|^q \in L^{(\frac{p}{q})'}(\Omega)$, où $(\frac{p}{q})' = \frac{p}{p-q}$ alors $a \in L^r(\Omega)$ avec $r = \frac{qp}{p-q}$
....(02 points)
Cas 02 : Si $p = \infty$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$, prenons par exemple $u = 1$ alors

$$\|Tu\|_q = \|a\|_q \leq C \qquad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

Alors $a \in L^q(\Omega)$ ....(02 points)