Université de Tlemcen 09/06/2021
Faculté des sciences
Département de mathématiques
Master 1 EDP

Examen final: Théorie spectrale des opérateurs.

Exercice 1

I- Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert complexe H.

1/ Montrer que si A est inversible alors les opérateurs A et A^{-1} ont les mêmes vecteurs propres.

2/ Montrer que si l'opérateur A^2 possède un vecteur propre alors il en est de même pour l'opérateur A.

3/ Montrer que si $x \neq 0$,alors x est un vecteur propre de A si et seulement si $|\langle Ax, x\rangle| = \|Ax\| \|x\|$.

4/ En déduire que A admet une valeur propre μ avec $|\mu| = \|A\|$ si et seulement $\exists x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\langle Ax, x\rangle| = \|T\|$.

II- Soit $H = L^2([0, 1])$,On considère l'opérateur T défini par : $Tu = \frac{du}{dx}$

1/Déterminer le domaine de T. 2/Montrer que l'opérateur T nest pas borné.

3/ Montrer que l'opérateur T est fermé.

EXERCICE 2

Soit $f \in L^2([0, 1])$. On considère le problème aux limites

$$(P) \begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 1 \end{cases}$$

1/ Montrer que (P) a une solution unique de la forme

$$x(t) = (Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s)\, ds$$

où

$$k(t, s) = \begin{cases} s(t-1) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(s-1) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

2/ Montrer que l'opérateur K est compact.

3/ En déduire que 0 n'est pas valeur propre de l'opérateur K et que $\lambda \neq 0$ est valeur propre de K de fonction propre associée f si et seulement si $f \neq 0$ est deux fois dérivable et vérifie

$$(P') \begin{cases} f''(t) - \dfrac{1}{\lambda} f(t) = 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

.

4/ Déterminer le spectre de K ainsi les fonctions propres.

Corrigé : Examen final AU 2020/2021

Ex 1

1/ On remarque que si A est inversible alors $0 \notin \sigma(A)$. Donc on peut supposer que $\lambda \neq 0$. On a :

$$A v = \lambda v \Leftrightarrow v = A^{-1}(\lambda v) = \lambda A^{-1}(v) \Leftrightarrow A^{-1} v = \lambda^{-1} v$$

Par conséquent v est un vect propre de A associé à la valeur propre λ ssi v est un vect propre de A^{-1} associé à la valeur propre λ^{-1}.

2/ Supp $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ et $v \neq 0$, $v \in H$ tq $A^2 v = \lambda v$ alors

$$(A^2 - \lambda I)(v) = 0 \quad = (A + \sqrt{\lambda}\, I)(A - \sqrt{\lambda}\, I) = 0$$

On a 2 cas :

1er cas : si $(A - \sqrt{\lambda}\, I)(v) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}$ est une v.p de A associée au vect propre v.

2ème cas $(A + \sqrt{\lambda}\, I)(v) = 0 \Rightarrow -\sqrt{\lambda}$ est une v.p de A associé au vect propre v.

3/ Mq si $x \neq 0$, x est un vect propre de A ssi $|\langle A x, x\rangle| = \|Ax\| \, \|x\|$.

$\Rightarrow$) Si $x \neq 0$, x vect propre de A alors $Ax = \lambda x$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle.$$

$$|\langle Ax, x\rangle| = |\lambda| \langle x, x\rangle = |\lambda| \, \|x\|^2 = \|\lambda x\| \, \|x\| =$$
$$= \|Ax\| \, \|x\|.$$

$\Leftarrow$) $x \neq 0$, $|\langle Ax, x\rangle| = \|Ax\| \, \|x\|$

On remarque que Ax et x sont 2 vecteurs coliné-
-aires donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $Ax = \lambda x$.

4/ $\Rightarrow$ si μ est une valeur propre tq $|\mu| = \|A\|$, x est le vect propre associé $Ax = \mu x$ tq $\|x\| = 1$ alors d'après 3/

$|\langle Ax, x\rangle| = \|Ax\| \, \|x\| = |\mu| \, \|x\|^2 = |\mu| = \|A\|$

$\Leftarrow$) si pour $x \in H$, tq $\|x\| = 1$ on a ~~...~~

$|\langle Ax, x\rangle| = \|A\|$ en utilisant 3/ on déduit que x est un vecteur propre de A. donc $Ax = \mu x$

donc $|\mu| = \|A\|$

Partie II : voir le cours.

Ex2 :

$f \in L^2([0,1])$,

$$(P) \begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 1 \end{cases}$$

En intégrant.

$$x'(t) = \int_0^t f(u)\,du + A$$

$$x(t) = \int_0^t \left(\int_0^u f(s)\,ds \right) du + At + B.$$

A et $B \in \mathbb{R}$, En utilisant le Th de Fubini on a

$$\int_0^t \left(\int_0^u f(s)\,ds \right) du = \int_0^t \left(f(s) \int_s^t du \right) ds$$

$$= \int_0^t (t-s)\, f(s)\, ds .$$

Ainsi

$$x(t) = \int_0^t (t-s)\, f(s)\, ds + At + B$$

en utilisant les conditions aux bord on obtient,

$$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 (1-s)\, f(s)\, ds + A = 0$$

donc $A = -\int_0^1 (1-s)\, f(s)\, ds$

$$A = -\int_0^1 (1-s)\, f(s)\, ds$$

$$x(t) = \int_0^t \left(\int_0^u f(s)\, ds \right) du - t \int_0^1 (1-s) f(s)\, ds$$

&

$$x(t) = \int_0^t (t-s)\, f(s)\, ds - t \int_0^1 (1-s)\, f(s)\, ds .$$

$$= \int_0^t (t-s)\, f(s)\, ds - t \int_0^t (1-s)\, f(s)\, ds - t \int_t^1 (1-s) f(s)$$

$$= \int_0^t s(t-1)\, f(s)\, ds + \int_t^1 t(s-1)\, f(s)\, ds .$$

$$= \int_0^1 K(t,s)\, f(s)\, ds .$$

2/ Mq K est un operateur compact.

Come $H = L^2([0,1])$. On peut considérer l'op

$$K : L^2([0,1]) \xrightarrow{\text{cpte}} C([0,1]) \xrightarrow{\text{cont}} L^2([0,1])$$

Comme étant la composée de 2 applications une application cpte et l'autre continue $\Rightarrow$ définit un op cpt.

Pour $x_1, x_2 \in [0,1]$:

$$|Kf(x_1) - Kf(x_2)| = \left| \int_0^1 k(x_1, s) - k(x_2, s) f(s) ds \right|$$

$$\leq \| k(x_1, s) - k(x_2, s) \|_{L^2} \| f \|_{L^2} \leq C$$

$$\leq \sup_{s \in [0,1]} |x_1 - x_2| \, \| f \|_{L^2}.$$

On a $(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$

en utilisant Cauchy-Schwartz on a

$$(Kf)^2(t) \leq \| f \|_2^2 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds$$

$$\int_0^1 (Kf)^2(t) dt \leq \| f \|_2^2 \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds\, dt$$

$$\| Kf \|_2^2 \leq \| f \|_2^2 \, \| k \|_2^2 < \infty.$$

On pose $\| k \|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds\, dt$

D'après le Th d'Ascoli Arzela l'op K est un op cpt de $L^2([0,1]) \to C([0,1])$

par conséquent K est cpt de $L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$

3) K cpt $\Rightarrow \sigma(K) = \sigma_p \cup \{0\}$

$$x(t) = (Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)$$

$$= \int_0^t s(t-1) f(s) ds + \int_t^1 t(s-1) f(s) ds.$$

En utilisant la formule de Leibniz on obtient (deux fois la derivation).

$$(Kf)(t) = \lambda f(t).$$

$$\lambda f'(t) = \cancel{t(t-1) f(s)} + \int_0^t s f(s) - \cancel{t(t-1) f(s)}$$

$$+ \int_t^1 (s-1) f(s) ds.$$

$$\lambda f'(t) = \int_0^1 s f(s) - \int_t^1 f(s) ds.$$

$$\lambda f''(t) = f(t) \Rightarrow f''(t) - \frac{1}{\lambda} f(t) = 0.$$

les conditions aux bord sont satisfaites

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0.$$

Déterminons les el^{ts} du spectre ponctuel pour $\lambda \neq 0$

$r^2 = \frac{1}{\lambda}$ eq caract

si $\lambda > 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$

si $\lambda < 0 \Rightarrow r = \pm i \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$

1er cas; si $\lambda > 0$ la sol gle sera

$f(t) = C_1 e^{t\sqrt{1/\lambda}} + C_2 e^{-t\sqrt{1/\lambda}}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$f(1) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{1/\lambda}} - C_1 e^{-\sqrt{1/\lambda}} = 0$

donc $C_1 = 0 \Rightarrow \lambda$ n'est pas positive.

si $\lambda < 0$ la sol gle est

$f(t) = C_1 \cos\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}\, t + C_2 \sin\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}\, t$

$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

$f(1) = 0 \Rightarrow C_2 \sin\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}\, \cancel{1} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{-1}{\lambda}} = k\pi \quad k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lambda_k = -\frac{1}{\pi^2 k^2}$

les fcts pique associées $f_k(t) = C \sin(k\pi t)$