Université de Tlemcen A.U.2020-2021
Département de Mathématiques 30 Mai2021

Examen
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice 1

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,une fonction lipschitzienne ,on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u + g(\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{1}$$

1. On pose $f(u) = -g(\nabla u)$ .Montrer que l'opérateur $u \in H_0^1 \rightsquigarrow f(u) \in L^2(\Omega)$ est continu .
2. Montrer, l'existence de solution faible $w$pour le problème linéaire suivant ,
$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f(u), & \text{dans } \Omega \\ w(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$
3. Enoncer le théorème de Scheaffer de point fixe.Et, l'appliquer pour montrer l'existence d'une solution faible pour le problème (1)quand μ est assez grand.

Exercice 2

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in]1, +\infty[$.
Soit q l'exposant conjugué de p, montrer que
$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$$
Endéduire que l'opérateur $\Delta_p = -div((\nabla u|^{p-2}\nabla u))$ est bien defini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$.
2. Montrer que Δ_p est continu et strictement monotone.
3. Soit $f \in L^q(\Omega)$. Donner l'expression vérifiée par une solution faible du problème (3) et montrer son existence
$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$
4. Montrer par la méthode de sous et sur solution l'existence de solution faible pour le problème suivant
$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) + b(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases},$$
où b est une fonction de Carathéodory telle que
$$\exists b_0 \in L^q(\Omega), \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}^N |, b(x, y, z)| \leq b_0(x)\, p.p\ \Omega$$

5. Pour quelles valeurs de f , le problème suivant admet une solution

$$\begin{cases} -\Delta_p u\,(x) + b(x, u\,(x)\,, \nabla u\,(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ \quad u\,(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{4}$$

Université de Tlemcen A.U.2020-2021
Département de Mathématiques

Corrigé de l'Examen du 30 Mai 2021
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice 1($10pts$)

1. $\boxed{\text{2pts}}$Soit $u \in X = H_0^1(\Omega)$, on pose $f(u) = -g(\nabla u)$.
   g étant lipschitzienne il existe $C > 0$, tel que
   $$|g(t)| \leq C(1 + |t|),$$
   ce qui implique $f(u) \in L^2(\Omega)$ puisque,
   $$\begin{aligned} \int_\Omega |f(u)(x)|^2 dx &\leq C. \int_\Omega (1 + |u(x)|)^2 dx \overset{2ab \leq a^2+b^2}{\leq} 2C. \int_\Omega 1 + |u(x)|^2 dx \\ &\leq 2C\left(|\Omega| + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned}$$
   On en déduit:
   $$\exists K > 0, K = K(C, |\Omega|); \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{1}$$

2. $\boxed{\text{2pts}}$On considère le problème linéaire suivant
   $$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f(u), & \text{dans } \Omega \\ w(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$
   On montre facilement en utilisant la formule de Green que (2) est équivalent à la formulation variationnelle:
   $$\begin{cases} \text{Trouver } w \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla w.\nabla v + \mu w.v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3}$$
   On munit l'espace $H_0^1(\Omega)$ de la norme H^1.En tant qu'espace fermé de $H^1(\Omega)$,c'est un espace de Hilbert. $a(w, v) = \int_\Omega \nabla w.\nabla v + \mu w.v dx$ est une forme bilinéaire continue
   $$\begin{aligned} |a(w,v)| &\leq \|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^N} + \mu \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \mu) \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$
   et la forme $l(v) = \int_\Omega f(u) v dx$ est, de manière évidente, linéaire, et continue :
   $$\begin{aligned} |l(v)| &= \left|\int_\Omega f(u) v dx\right| \overset{Holder}{\leq} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}; \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer la coercivité de a pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram et conclure au caractère bien posé du problème (2). On a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega |\nabla v|^2 + \mu |v|^2 \, dx \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 , \\ avec \ \ \alpha &= \inf(1,\mu) \end{aligned}$$

La forme bilinéaire a est donc coercive, le théorème de Lax-Milgram s'applique : il existe une unique solution au problème (3) et donc au problème (2).Cette solution dépend continument des données.Il suffit d'écrire (3) pour v = w. On obtient en utilisant la coercivité de a et la continuité de l,

$$\alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(w,w) = \int_\Omega f(u) w dx \leq \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

et par suite,

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \tag{4}$$

3. $\boxed{1pt}$-Enoncé du théorème de Scheaffer de point fixe!

   -Application du th.de Scheaffer
   Rappelons que pour $\mu > 0$,l'opérateur $-\Delta + \mu Id$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, donc $(-\Delta + \mu Id)^{-1}$est bien défini.Dans ce cas w solution de (2), avec $f(u) \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$,s'écrit

$$w = (-\Delta + \mu Id)^{-1} (f(u))$$

   a) $\boxed{1.5pt}$Soit l'opérateur $T : \underset{u}{H_0^1(\Omega)} \underset{\rightsquigarrow}{\rightarrow} \underset{(-\Delta+\mu Id)^{-1}(f(u))}{H_0^1(\Omega)}$
   $T(u) = w$,T est bien défini et de $(1,4)$,on a

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K}{\alpha} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

   Donc T est continu.
   $\boxed{1.5pt}$T est compact: $(u_n)_n$suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$, par (**??**) la suite $(w_n = T(u_n))_n$est bornée dans $H_0^1(\Omega)$,alors

$$\exists \left(w_{n_k}\right)_{n_k} \text{ s-suite,} \exists w \in H_0^1(\Omega), w_{n_k} \rightharpoonup w \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

   $H_0^1(\Omega) \underset{compact}{\subset} L^2(\Omega)$ par passage à une sous suite $w_{n_{k_j}} \to w$ dans $L^2(\Omega)$, et par définition $w_{n_{k_j}} = T\left(u_{n_{k_j}}\right)$ et la continuité de T, on a $\int_\Omega \nabla \left(w_{n_{k_j}} - w\right).\nabla v + \mu \left(w_{n_{k_j}} - w\right).v dx \to 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$en prenant

$v = w_{n_{k_j}} - w$, on obtient $\int_\Omega \left|\nabla(w_{n_{k_j}} - w)\right|^2 + \mu \left|w_{n_{k_j}} - w\right|^2 dx \to 0$ ce qui permet d'obtenir la convergence forte de $\left(w_{n_{k_j}}\right)$dans $H_0^1(\Omega)$.

b)$\boxed{\text{2pts}}$ Soit $A := \left\{v \in H_0^1(\Omega), v = \lambda T(v),\text{ pour } \lambda \in [0,1]\right\}$, montrons que A est borné dans $H_0^1(\Omega)$.

$$v = \lambda T(v) \overset{\lambda \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{v}{\lambda} = T(v)$$

donc $\frac{v}{\lambda}$ vérifie le problème(2) donc

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta v + \mu v = -\lambda g(\nabla v), & \text{dans } \Omega \\ \frac{v}{\lambda} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{5}$$

d'où en multipliant par v et en intégrant sur Ω,on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + \mu |v|^2 dx = -\lambda \int_\Omega g(\nabla v) v dx \leq C\lambda \int_\Omega (|\nabla v| + 1) v dx$$

de l'inégalité de Young avec $\varepsilon, ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \varepsilon \frac{b^2}{2}$,

$$\int_\Omega (|\nabla v| + 1) v dx \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega (|\nabla v| + 1)^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |v|^2 dx$$

utilisant l'inégalité de Holder et on choisit ε tel que l'on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \mu |v|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + B \int_\Omega |v|^2 dx + cste(|\Omega|)$$

où $B = B(|\Omega|)$ .De là on arrive à

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + (\mu - B) \int_\Omega |v|^2 dx \leq cste(|\Omega|)$$

Donc si μ est assez grand $\mu >> B$,

$$\frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + (\mu - B) \int_\Omega |v|^2 dx \leq cste(|\Omega|)$$

ce qui prouve que A est borné

c) Les conditions du th. de Scheaffer sont vérifiées ce qui entraine l'existence d'un point fixe pour T et donc une solution du problème.

<u>Exercice 2</u>(10*pts*)

1. $\boxed{\text{1.5pt}}$Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \geq 2$.
   Soit q l'exposant conjugué de p, on a

$$\int_\Omega \left|\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)\right|^q dx = \int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)q} dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \tag{6}$$

   et par suite l'opérateur $\Delta_p u = -div((\nabla u|^{p-2}\nabla u))$ est bien defini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.

2. $\boxed{\text{1.5pts}}$a) L'opérateur p Laplacien $-\Delta_p$,est continu

$$\begin{aligned} -\Delta_p &: W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega) \\ \langle \Delta_p u, v \rangle_{W^{-1,q};W_0^{1,p}} &: = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) .\nabla v dx \end{aligned}$$

On a par l'inégalité de Holder et (6) ,pour tous $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$|\langle \Delta_p u, v \rangle| \leq \left\| |\nabla u|^{p-1} \right\|_{L^q} \|v\|_{L^p} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}} \|v\|_{W_0^{1,p}}$$

Par suite, $\|\Delta_p u\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}}$, d'où la continuité de l'opérateur -Δ_p.
b) $\boxed{\text{2pts}}$$-\Delta_p$ est strictement monotone
Puisque l'opérateur $-\Delta_p$ est la dérivée de la fonctionnelle définie par

$$\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R};\ \phi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

Pour tous $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la fonction

$$t \rightsquigarrow \phi(tu + (1-t)v)$$

est une fonction réelle strictement convexe ce qui entraine que sa dérivée est strictement croissante. En particulier pour $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)\, , u \neq v$,

$$\frac{d}{dt} \phi(tu + (1-t)v)_{|t=1} > \frac{d}{dt} \phi(tu + (1-t)v)_{|t=0}$$

ce qui veut dire

$$\langle \phi'(u), u - v) \rangle > \langle \phi'(v), u - v) \rangle$$

Et donc ϕ'est strict.monotone

3. $\boxed{\text{2pts}}$Soit $f \in L^q(\Omega)$. u est une solution faible (**??**) si pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

De plus, si u est dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors ∇u est dans un borné de $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et par(6) , $\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right)$ est dans un borné de $L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Par consequent, $-\Delta_p(u)$ reste dans un borné de $W^{-1,q}(\Omega)$. Et $-\Delta_p$ est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, donc à fortiori hemicontinu.
D'autre part, par l'inégalité de Poincaré, $\exists c(\Omega) > 0$,

$$\langle -\Delta_p v, v \rangle_{W^{-1,q};W_0^{1,p}} := \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx \geq c(\Omega) \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

ce qui entraine la coercivité de $-\Delta_p, i.e$

$$\lim_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\to+\infty}\frac{\langle -\Delta_p v, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}=+\infty$$

Conclusion :
Puisque $-\Delta_p$ est un opérateur monotone borné hemicontinu et coercif , il est surjectif.
Donc on obtient l'existence de solution pour (**??**) .
De plus puisque$-\Delta_p$ est un opérateur strictement monotone, il est injectif.
Par suite $(-\Delta_p)^{-1}$ est bien défini!

4. $\boxed{\text{2pts}}$Soient $\underline{u}=(-\Delta_p)^{-1}(-b_0)$ et $\overline{u}=(-\Delta_p)^{-1}(b_0)$ alors par définition de l'opérateur $(-\Delta_p)^{-1}$et b_0 on a $\overline{u},\underline{u}\in W_0^{1,p}(\Omega)\, et$

$$-\Delta_p\underline{u}(x)+b(x,\underline{u}(x),\nabla\underline{u}(x))=-b_0+b(x,\underline{u}(x),\nabla\underline{u}(x))\leq 0$$

$$-\Delta_p\overline{u}(x)+b(x,\overline{u}(x),\nabla\overline{u}(x))=b_0+b(x,\overline{u}(x),\nabla\overline{u}(x))\geq 0$$

Donc $\overline{u},\underline{u}$sont des sur et sous solutions de

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x)+b(x,u(x),\nabla u(x))=0, & \text{dans } \Omega \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases},$$

où b est une fonction de Carathéodory telle que

$$\exists b_0\in L^q(\Omega),\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}^N\,|, b(x,y,z)|\leq b_0(x)\, p.p\ \Omega$$

5. $\boxed{\text{1pt}}$Pour $f\in[-b_0+b(.,\underline{u},\nabla\underline{u});b_0+b(.,\overline{u},\nabla\overline{u})]$, le problème suivant admet une solution $\begin{cases} -\Delta_p u(x)+b(x,u(x),\nabla u(x))=f(x), & x\in\Omega \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases},$