Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2020/2021.
Mars 2021.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Examen final
(1h45mn)

Exercice **[5pts]**

1- Montrer que si H_v est la distribution de Heaviside alors $H_v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $H_v' = \delta$ au sens des distributions (dans $\mathcal{S}'$). (1.5pts)

Rappel: $H_v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions tempérées.

2- Montrer que $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}(T^{(n)}(t))(\sigma) = (2i\pi\sigma)^n (\mathcal{F}T(t))(\sigma)$ (1.5pts)

Rappel: Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $(\mathcal{F}\phi(\sigma))^{(n)}(t) = \mathcal{F}((-2i\pi\sigma)^n \phi(\sigma))(t)$ ①

et aussi $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\langle T^{(n)}, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ②

3- Montrer que $\mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ où $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et δ est la distribution de Dirac (singulière): $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (1pt)

4- Montrer que $\mathcal{F}(H_v(t))(\sigma) = 1/(2i\pi\sigma)$. (1pt)

Indication: Utiliser directement tous les résultats précédents.

Problème [15pts]

1) Etant donnée une transformation (système S) qui à un signal d'entrée f fait correspondre un signal de sortie g : $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) = S(f(t))$, citer alors les trois (3) conditions imposées pour que la transformation S constitue un filtre linéaire (Donner l'interprétation mathématique) (3pts)

2) Par quelle opération est caractérisé un filtre linéaire? (1pt)

3) Etant donnée une fonction f, appelée fonction d'entrée, un filtre différentiel est défini comme un opérateur linéaire continu permettant de calculer, à partir de f, une fonction de sortie g t.q. f et g soit liées l'une à l'autre par une équation différentielle du type: [1] $\sum_{j=0}^{M} a_j f^{(j)} = \sum_{k=0}^{N} b_k g^{(k)}$

où $f^{(j)}$ est la dérivée d'ordre j de f et $g^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de g au sens des distributions. On suppose, en outre, que f et $g \in \mathcal{S}'$.

3.1) Par transformation de Fourier appliquée aux deux membres de [1], montrer que l'on obtient [1']:

$[1'] : \sum_{j=0}^{M} a_j \, (2i\pi\sigma)^j \left(\mathcal{F}f(x)\right)(\sigma) = \sum_{k=0}^{N} b_k \, (2i\pi\sigma)^k \left(\mathcal{F}g(x)\right)(\sigma)$ (2pts) $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

Rappel : $\left(\mathcal{F}f^{(n)}(x)\right)(\sigma) = (2i\pi\sigma)^n \left(\mathcal{F}f(x)\right)(\sigma)$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ au sens des distr. tempérées.

3.2) Déterminer la formule générale donnant la fonction de transfert de ce type de filtre (filtre différentiel) et montrer qu'elle s'écrit sous la forme suivante : $H(\sigma) = \dfrac{P(2i\pi\sigma)}{Q(2i\pi\sigma)}$ avec P et Q les 2 polynômes :
$P(s) = \sum_{j=0}^{M} a_j s^j$ et $Q(s) = \sum_{k=0}^{N} b_k s^k$. (2pts)

Rappel : f étant la distribution (ou fonction) d'entrée et g la distribution (ou fonction) de sortie alors $\mathcal{F}g = H \cdot \mathcal{F}f$ où $H = \mathcal{F}h$, h étant la réponse impulsionnelle caractérisant le filtre différentiel en question ($g = f * h$).

4) Ds le cas où l'on considère le système (filtre différentiel) :
$f \xrightarrow{S} g = f'$ (filtre dérivateur)

4.1) Par identification avec [1], déterminer la fction de transfert associée au filtre dérivateur (2pts)

4.2) Comparer le résultat trouvé en 4.1 avec celui résultant du calcul direct de la fonction de transfert lorsque l'on se rappelle que $g = f' = f * \delta'$ (1pt)

5) Ds le cas où l'on considère le système d'un filtre intégrateur du type $f(t) \xrightarrow{S} g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\, du$

5.1) Montrer que c'est aussi un filtre de type différentiel. (1pt)

5.2) Par identification avec [1], déterminer la fonction de transfert associée au filtre intégrateur. (2pts)

5.3) Comparer le résultat trouvé avec celui résultant du calcul direct de la fonction de transfert du filtre intégrateur si l'on se rappelle que $g = f * H_v$ où H_v est la distribution tempérée de Heaviside. (1pt)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2020/2021.
Mars 2021.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Corrigé de l'examen final

Exercice **[5pts]**

1- H_v est la distribution de Heaviside : $H_v(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ qui est 1 fonction réelle constante par intervalles donc à

0.5) croissance lente $\Rightarrow H_v \in \mathcal{S}'$ ($H_v(t) \leq 1\ \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow H_v$ bornée sur $\mathbb{R}$)

$$\forall \phi \in \mathcal{S} \quad \langle H_v', \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\langle H_v, \phi'\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_v(t)\phi'(t)\,dt = -\int_0^{+\infty}\phi'(t)\,dt$$

1pt

$$= -\left[\phi(t)\right]_0^{+\infty} = \phi(0) - \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

$\Rightarrow H_v' = \delta$ au sens des distrib. ($\lim_{t\to+\infty}\phi(t)=0$ car $\phi\in\mathcal{S} \Rightarrow \phi$ à décrois. rapide)

2- $\forall \phi \in \mathcal{S}$ $\langle \mathcal{F}(T^{(n)}(t))(\sigma), \phi(\sigma)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T^{(n)}(t), \mathcal{F}(\phi(\sigma))(t)\rangle$

0.5pt $\overset{\text{rappel (2)}}{=} (-1)^n \langle T(t), [\mathcal{F}(\phi(\sigma))(t)]^{(n)}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

$\overset{\text{rappel (1)}}{=} (-1)^n \langle T(t), \mathcal{F}[(-2i\pi\sigma)^n\phi(\sigma)](t)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

0.5pt $= (-1)^n \langle \mathcal{F}(T(t))(\sigma), (-2i\pi\sigma)^n\phi(\sigma)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

0.25 $\overset{\sigma\mapsto(-2i\pi\sigma)^n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{=} (-1)^{2n}\langle (2i\pi\sigma)^n\mathcal{F}(T(t))(\sigma), \phi(\sigma)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

0.25 $= \langle (2i\pi\sigma)^n \mathcal{F}(T(t))(\sigma), \phi(\sigma)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \quad \forall \phi\in\mathcal{S}$

D'où le résultat : $\forall T\in\mathcal{S}'$ $\mathcal{F}(T^{(n)}(t))(\sigma) = (2i\pi\sigma)^n(\mathcal{F}(T(t))(\sigma))$

3- On montre ici que $\mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ (ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) sachant que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) = 1\ \forall t\in\mathbb{R}$.

En effet, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\langle \mathcal{F}\delta, \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle (\mathcal{F}\delta)(\nu), \phi(\nu)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \delta(\sigma), (\mathcal{F}\phi)(\sigma)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

$= (\mathcal{F}\phi)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)e^{-2i\pi t.0}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,dt$

$= \int_{\mathbb{R}}\phi(t)\,dt = \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}}, \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ car $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

D'où le résultat :
$\mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ au sens des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

4- H_v étant la distrib. de Heaviside $\Rightarrow H_v\in\mathcal{S}'$ (Voir quest. 1)) alors ns avons $H_v' = \delta$ et $\mathcal{F}(H_v') = \mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} = 1$ et d'un

1pt autre coté $\mathcal{F}(H_v') = \mathcal{F}(H_v^{(1)}(t))(\sigma) = (2i\pi\sigma)\mathcal{F}(H_v)(\sigma)$ (d'après 2) $n=1$)

Donc $(2i\pi\sigma)\mathcal{F}(H_v)(\sigma) = \mathcal{F}(H_v') = \mathcal{F}(\delta) = 1 \Rightarrow \mathcal{F}(H_v(t))(\sigma) = \dfrac{1}{2i\pi\sigma}$

Problème

1) La transformation (système) S est un filtre (linéaire) si (3 conditions) :

1pt **1a)** S est linéaire c.à.d. $\forall f_1, f_2$ signaux d'entrée $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha S(f_1) + \beta S(f_2)$

1pt **1b)** S est continue c.à.d. : $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \Rightarrow S(f_k) \xrightarrow{\mathcal{D}'} S(f)$

(Ds ce cas on a, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\lim_{k\to\infty} S(f_k) = S(\lim_{k\to\infty} f_k)$)

1pt **1c)** S est invariant en translation c.à.d. : Si toute translation de la fction d'entrée f entraîne la même translation de la fction de sortie g :
$g(t) = S(f(t))\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow S(f(t-t_0)) = g(t-t_0)$ où t_0 est ici l'émetteur de la translation.

2) Un filtre linéaire est caractérisé par une <u>opération de convolution.</u> 1pt

3) [1] : $\displaystyle\sum_{j=0}^{M} a_j f^{(j)} = \sum_{k=0}^{N} b_k g^{(k)}$ $\quad a_j, b_k \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, \dots, M$ et $k = 0, \dots, N$.

On peut supposer que f et $g \in \mathcal{S}'$

3.1) Par transformation de Fourier, l'équation [1] s'écrira comme suit :

1pt $$\sum_{j=0}^{M} a_j\, \mathcal{F}(f^{(j)}(t))(\sigma) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, \mathcal{F}(g^{(k)}(t))(\sigma)$$

et d'après la question 2) on obtient l'équation :

1pt $$\sum_{j=0}^{M} a_j (2i\pi\sigma)^j (\mathcal{F}f(t))(\sigma) = \sum_{k=0}^{N} b_k (2i\pi\sigma)^k (\mathcal{F}g(t))(\sigma)$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{F}f(t))(\sigma) \sum_{j=0}^{M} a_j (2i\pi\sigma)^j = (\mathcal{F}g(t))(\sigma) \sum_{k=0}^{N} b_k (2i\pi\sigma)^k$$

3.2) La fction de transfert notée H n'est autre que la T.F. de la réponse impulsionnelle caractérisant le filtre :

0,5pt $H = \mathcal{F}h$ où h est t.q. $g = f * h \Rightarrow H = \mathcal{F}h = \dfrac{\mathcal{F}g}{\mathcal{F}f}$

C.à.d. $H(\sigma) = \mathcal{F}(h(t))(\sigma) = \mathcal{F}(g(t))(\sigma) / \mathcal{F}(f(t))(\sigma)$

0,5pt Donc $H(\sigma) = \dfrac{\sum_{j=0}^{M} a_j (2i\pi\sigma)^j}{\sum_{k=0}^{N} b_k (2i\pi\sigma)^k} = \dfrac{P(2i\pi\sigma)}{Q(2i\pi\sigma)}$ 2pts

1pt où $P(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{M} a_j x^j$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} b_k x^k$

4) $f \xrightarrow{S} g = f'$ (S filtre dérivateur)

4.1) Ds [1] nous avons : * pour le 1er membre : $a_j = 0$ si $j \neq 1$ et $a_1 = 1$ 0,5 pt

* pour le 2nd membre : $b_k = 0$ si $k \neq 0$, $b_0 = 1$ 0,5 pt

$$\text{Donc } H(\sigma) = \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{M} a_j (2i\pi\sigma)^j + a_1 (2i\pi\sigma)^1 \right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{N} b_k (2i\pi\sigma)^k + b_0 (2i\pi\sigma)^0 \right)$$

1pt

$$\Rightarrow H(\sigma) \underset{b_0=1}{\overset{a_1=1}{=\!=}} 2i\pi\sigma$$

4.2) $g = f' = f * \delta'$ où $h = \delta' \Rightarrow H = \mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(\delta')$

$$\text{c. à d. } \underbrace{H(\sigma) = \mathcal{F}(\delta')(\sigma)}_{0,5} \underset{\text{ds Exercice}}{\overset{\text{quest. 2)}}{=\!=\!=}} (2i\pi\sigma) \underbrace{\mathcal{F}(\delta)(\sigma)}_{= \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\sigma) = 1} = 2i\pi\sigma$$

1pt 0,5

5) $f(t) \xrightarrow{S} g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du$ (S filtre intégrateur)

5.1) $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du \Rightarrow g' = f$ qui est l'équation identifiable à l'équat. diff. [1] en choisissant convenablement les coefficients a_j et b_k ds [1].

1pt

5.2) Ds [1] nous avons : * pour le 1er membre : $a_0 = 1$ et $a_j = 0$ pour $j = 1, M$

1pt

* pour le 2nd membre : $b_1 = 1$ et $b_k = 0$ pour $k \neq 1$ (de 0 à N)

$$\text{Donc } H(\sigma) = \left(a_0 (2i\pi\sigma)^0 + \sum_{j=1}^{M} a_j (2i\pi\sigma)^j \right) \Bigg/ \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{N} b_k (2i\pi\sigma)^k + b_1 (2i\pi\sigma) \right)$$

1pt

$$\Rightarrow H(\sigma) \underset{b_1=1}{\overset{a_0=1}{=\!=}} \frac{1}{2i\pi\sigma}$$

5.3) $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = (f * H_v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) H_v(t-u)\,du$ où $H_v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(u) H_v(t-u)\,du + \int_{t}^{+\infty} f(u) H_v(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = g(t)$$

$$\text{car } H_v(t-u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq t \ (\Leftrightarrow t-u \geq 0) \\ 0 & \text{si } u > t \ (\Leftrightarrow t-u < 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}g)(\sigma) = (\mathcal{F}f)(\sigma) \cdot (\mathcal{F}H_v)(\sigma) \Rightarrow (\mathcal{F}H_v)(\sigma) = (\mathcal{F}g)(\sigma) / (\mathcal{F}f)(\sigma) = H(\sigma)$$

or nous avons déjà vu ds la question 4) de l'exercice que

$$(\mathcal{F}H_v)(\sigma) = \frac{1}{2i\pi\sigma} = H(\sigma)$$

1pt