Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2020-2021
Module : Contrôle Optimal
Date : 29-06-2021

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN DE RATTRAPAGE

Exercice : Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs.

Pour traiter une population $x_0 > 0$ d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population $y_0 > 0$ d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles.

On suppose que les insectes prédateurs que l'on introduit sont stériles, et ne peuvent donc pas se reproduire. Le contrôle consiste en l'introduction régulière d'insectes prédateurs. Le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)),\ x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = -cy(t) + u(t),\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où $a > 0$ est le taux de reproduction naturelle des nuisibles, $b > 0$ est un taux de prédation, $c > 0$ est le taux de disparition naturelle des prédateurs. Le contrôle $u(t)$ est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs au temps t, il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M,$$

où $M > 0$. On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ **fixé**, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits ; autrement dit on veut minimiser

$$x(T) + \int_0^T u(t)dt.$$

(1) Montrer que $y(t) \geq y_0 e^{-ct}$ pour tout $t \in [0,T]$.
(2) En déduire que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
(3) Montrer que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
On note les variables adjointes λ_1 et λ_2.
(4) Ecrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations des extrémales.
(5) Ecrire les conditions de transversalité $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$.
(6) Soit u le contrôle optimal. Montrer que

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_2(t) + 1 > 0, \\ M \text{ si } \lambda_2(t) + 1 < 0. \end{cases}$$

(7) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [T - \varepsilon, T]$.
(8) Démontrer que la fonction $t \mapsto x(t)\lambda_1(t)$ est constante sur $[0, T]$.
(9) En déduire que $x(t)\lambda_1(t) = x(T)$ pour tout $t \in [0, T]$.
(10) En déduire une expression de $\lambda_2(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
(11) Démontrer que u a au plus une commutation. Lorsqu'il en a une, déterminer à quel temps elle a lieu.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. : 2020-2021
Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé de l'examen de rattrapage
du mardi 29 juin 2021.

Exercice : Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs.

(1) Montrons que $y(t) \geq y_0 e^{-ct}$ pour tout $t \in [0, T]$: 2 pts

Soit $t \in [0, T]$, on a

$$\dot{y}(t) = -c\, y(t) + u(t)$$
$$\geq -c\, y(t) \quad \text{car } u(t) \geq 0.$$

Ce qui donne,
$$\left(e^{c.t}\, y(t)\right)' \geq 0.$$

Par intégration, on obtient

$$e^{ct} y(t) - y(0) \geqslant 0.$$

C'est-à-dire,

$$y(t) \geqslant y_0 e^{-ct}.$$

En conclusion,

$$\forall t \in [0, T],\ y(t) \geqslant y_0 e^{-ct}.$$

(2) En déduire que $y(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$: 1 pt.

Soit $t \in [0, T]$, on a

$$y(t) \geqslant y_0 e^{-ct}.$$

Comme $y_0 > 0$ par hypothèse et $e^{-ct} > 0$, on obtient

$$y(t) > 0.$$

En conclusion,

$$\forall t \in [0, T],\ y(t) > 0.$$

(3) Montrons que $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$: 2 pts.

Supposons par absurde qu'il existe un point $t^* \in]0,T]$ tel que $x(t^*) = 0$. (voir que $x(0) > 0$).

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\,(a - b\,y(t)), \\ x(t^*) = 0. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy ci-dessus admet deux solutions qui sont x et la solution identiquement nulle contradiction car le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution.

En conclusion : $\forall\, t \in [0,T],\ x(t) > 0$.

(4) Le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations des extrémales : 3 pts

Le Hamiltonien H du problème de contrôle optimal est donné par

$$H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) = \lambda_1(t)\left[x(t)\left(a - b\,y(t)\right)\right] + \lambda_2(t)\left(-c\,y(t) + u(t)\right) + u(t).$$

Les équations des extramales sont données par :

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \lambda_1(t)\left(b\,y(t) - a\right), \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

et

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= b\,\lambda_1(t)\,x(t) + c\,\lambda_2(t), \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

(5) Les équations de transversalité $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$: 2pts.

On a,

$$\Psi(x(T), y(T)) = x(T).$$

Alors,

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x(T), y(T)) = 1,$$

et

$$\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x(T), y(T)) = 0.$$

(6) Soit u le contrôle optimal. Montrons que

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_2(t) + 1 > 0, \\ M & \text{si } \lambda_2(t) + 1 < 0. \end{cases} \qquad (2\text{pts}).$$

D'après le principe du maximum de Pontriaguine, on a

$$H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) = \min_{v \in [0, M]} H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, v).$$

C'est-à-dire,

$$\lambda_1(t)\left[x(t)(a - by(t))\right] + \lambda_2(t)(-cy(t) + u(t)) + u(t)$$

$$= \min_{v \in [0, M]} \left\{ \lambda_1(t)\left[x(t) - by(t)\right] + \lambda_2(t)(-cy(t) + v) + v \right\}.$$

C'est-à-dire,

$$(\lambda_2(t)+1)\,u(t) = \min_{v\in[0,M]} (\lambda_2(t)+1)v.$$

Ce qui donne,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_2(t)+1>0, \\ M & \text{si } \lambda_2(t)+1<0. \end{cases}$$

(7) En déduire qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $u(t)=0$, pour tout $t\in[T-\varepsilon, T]$: 1 pt.

Comme $\lambda_2(T)=0$ et la fonction $t\mapsto\lambda_2(t)$ est continue alors il existe $\varepsilon>0$ tel que

$\lambda_2(t)+1>0$, pour tout $t\in[T-\varepsilon, T]$.

Ce qui entraîne d'après la question précédente que $u(t)=0$, pour tout $t\in[T-\varepsilon, T]$.

(8) Montrons que la fonction $t \longmapsto x(t)\lambda_1(t)$ est constante sur $[0,T]$.

Soit $t \in [0,T]$, on a

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\lambda_1(t)\right) = \dot{x}(t)\lambda_1(t) + x(t)\dot{\lambda}_1(t)$$

$$= x(t)\left(a - by(t)\right)\lambda_1(t) + x(t)\left(by(t) - a\right)\lambda_1(t)$$

$$= 0.$$

Alors,

$$\forall t \in [0,T], \quad x(t)\lambda_1(t) = C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

(9) En déduire que $x(t)\lambda_1(t) = x(T)$, pour tout $t \in [0,T]$: 1pt.

D'aprés la question précédente, on a

$$\forall t \in [0,T], \quad x(t)\lambda_1(t) = x(T)\lambda_1(T).$$

Comme $\lambda_1(T) = 1$, on obtient

$$\forall t \in [0,T], \quad x(t)\lambda_1(t) = x(T).$$

(10) En déduire une expression de $\lambda_2(t)$ pour tout $t \in [0,T]$: 2 pts.

On a,

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_2(t) = b\,\lambda_1(t)\,x(t) + c\,\lambda_2(t), & t \in [0,T], \\ \lambda_2(T) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_2(t) = b\,x(T) + c\,\lambda_2(t), & t \in [0,T], \\ \lambda_2(T) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \left(e^{-ct}\,\lambda_2(t)\right)' = b e^{-ct}\,x(T), & t \in [0,T], \\ \lambda_2(T) = 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_t^T \left(e^{-cs}\,\lambda_2(s)\right)' ds = b\,x(T) \int_t^T e^{-cs}\,ds$$

C'est-à-dire,

$$-e^{-ct}\lambda_2(t) = -\frac{b\,x(T)}{c}\left(e^{-cT} - e^{-ct}\right).$$

Ce qui donne,

$$\lambda_2(t) = \frac{b\,x(T)}{c}\left(e^{c(t-T)} - 1\right), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

(11) Montrons que u a au plus une commutation. Lorsqu'il en a une, déterminer à quel temps elle a lieu : 3pts.

D'aprés la question (6), on a

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_2(t) + 1 > 0, \\ M & \text{si } \lambda_2(t) + 1 < 0. \end{cases}$$

Maintenant d'aprés la question précédente on a la fonction $t \mapsto \lambda_2(t) = \frac{b\,x(T)}{c}\left(e^{c(t-T)} - 1\right)$ est strictement croissante, alors l'équation $\lambda_2(t) + 1 = 0$ admet au plus une solution.

Par suite d'après la question (7), on peut avoir

$$u(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

ou

$$u(t) = \begin{cases} M & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ 0 & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

C'est-à-dire u a au plus une commutation.

Supposons que t_1 existe, alors on a

$$\lambda_2(t_1) + 1 = 0.$$

C'est-à-dire, $$\frac{b\,x(T)}{c}\left(e^{c(t_1 - T)} - 1\right) + 1 = 0.$$

Ce qui donne après calcul,

$$t_1 = T + \frac{1}{c} \cdot \ln\left(1 - \frac{c}{b\,x(T)}\right).$$