

Université de Tlemcen
 Département de Mathématiques, Module: Théorie de bifurcations, Juin 2021
 Master biomathématiques, Examen de rattrapage Durée 1h30'.

Exercice: 14 pts Soit le système

$$P_\mu \begin{cases} x' = y - x + xy \\ y' = x - y - x^2 \end{cases}$$

- a) 02 pts Montrer que la variété centre existe au voisinage de $(0, 0)$.
 b) 1pts Calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(0, 0)$ en $(0, 0)$.
 c) Soit

$$U^{-1} = (e_1, e_2)$$

où e_1, e_2 sont les vecteurs propres. 01 pt Calculer U .

- d) 02 pts Posons

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecrire le système différentiel que vérifie u et v .

- e) 02. pts Trouver E_c pour le système u et v en $(0, 0)$
 f) 03 pts Trouver W_c pour le système en $(u, v) = (0, 0)$.
 g) 03 pts Ecrire le système réduit .En déduire la nature du point d'équilibre $(x, y) = (0, 0)$.

Solution:

- a) on écrit le système sous la forme

$$X' = AX + G(X),$$

et on montre que

$$G(X) = o(X), \text{ quand } X \rightarrow 0$$

- b) On a

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$

- c) les vecteurs propres sont $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- d) On a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

et le nouveau système est

$$\begin{cases} u' = uv - v^2 \\ v' = -2v + uv - u^2 \end{cases}$$

f) la variété centre

$$W_c = \left\{ (u, v) : v = h(u) = -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^3 \dots \right\}$$

g) le système réduit est

$$u' = uv - v^2 = -\frac{1}{3}u^3 \dots$$

et le point $u = 0$ est stable.

Exercice 2: 06 pts Soit le système

$$S_\mu \begin{cases} x' = -y + \mu x + xy^2 \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \text{ un paramètre}$$

a) 02 pts Montrer que le système (S_μ) admet une bifurcation de Hopf au voisinage de $(0, 0)$.

la matrice jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \mu + i, \quad \lambda_2 = \mu - i$$

b) Donner la nature de cette bifurcation.

Un calcul simple de l'indice de Marsden McCracken donne que la bifurcation est sous critique.