Université de Tlemcen

Département de Mathématiques, Module: Théorie de bifurcations, 31 Mai 2021

Master biomathématiques, Examen Final, Durée 1h30'.

Exercice: Soit le système

$$P_\mu \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = y - x - x^2 \\ y' = \mu x - y - y^2 \end{array} \right. \qquad \mu \in R^+ \text{ un paramètre}$$

a) 02 pts Montrer que la variété centre existe au voisinage de $(0,0)$.

b) 2pts Calculer les valeurs propores de la matrice jacobienne $J(0,0)$ en $(0,0)$.

c) 1 pt Montrer que $J(0,0)$ est inversible ssi $\mu \neq 1$.

d) 1.5 pts Que prévoit le système en $(0,0)$ et $\mu = 1$?

e)1.5 pts Posons $\mu = 1 + \varepsilon$.Ecrire le système P_μ en fonction du paramètre ε.

f) 02 pts Calculer les valeurs propores de la nouvelle matrice Jacobienne en $(0,0)$ et $\varepsilon = 0$.

g) Soit

$$U^{-1} = (e_1, e_2)$$

où e_1, e_2 sont les vecteurs propres. 01 pt Calculer U.

h) 02 pts Posons

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecrire le système différentiel que vérifie u et v.

i) 02. pts Trouver E_c pour le systéme u et v en $(0,0)$ et $\varepsilon = 0$.

j) 03 pts Trouver W_c pour le système en $(u, v, \varepsilon) = (0,0,0)$.

k) 03 pts Donner le type de bifurcation .

Université de Tlemcen
Département de Mathématiques, Module: Théorie de bifurcations, Mai 2021
Master biomathématiques, Contôle continu, Durée 1h30'.

Exercice: Soit le système

$$P_\mu \quad \begin{cases} x' = y - x - x^2 \\ y' = \mu x - y - y^2 \end{cases} \qquad \mu \in R^+ \text{ un paramètre}$$

a) Montrer que la variété centre existe au voisinage de $(0,0)$.
b) Calculer les valeurs propores de la matrice jacobienne $J(0,0)$ en $(0,0)$.
c) Montrer que $J(0,0)$ est inversible ssi $\mu \neq 1$.
d) Que prévoit le système en $(0,0)$ et $\mu = 1$?
e)Posons $\mu = 1 + \varepsilon$.Ecrire le système P_μ en fonction du paramètre ε.
f) Calculer les valeurs propores de la nouvelle matrice Jacobienne en $(0,0)$ et $\varepsilon = 0$.
g) Soit

$$U^{-1} = (e_1, e_2)$$

où e_1, e_2 sont les vecteurs propres.Calculer U.
h) Posons

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecrire le système différentiel que vérifie u et v.
i) Trouver E_c pour le systéme u et v en $(0,0)$ et $\varepsilon = 0$.
j) Trouver W_c pour le système en $(u, v, \varepsilon) = (0,0,0)$.
k) Donner le type de bifurcation .

Solution
a) Il suffit d'écrire le système sous la forme

$$X' = AX + G(X),$$

et de montrer que

$$G(X) = 0(X) \quad \text{quand } X \to 0$$

b) $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\mu}$.
c)

$$\det J = 1 - \mu$$

d) Il est possible que le système subit une bifurcation locale.
e) le nouveau système s'écrit

$$\begin{cases} x' = y - x - x^2 \\ y' = x - y + \varepsilon x - y^2 \end{cases}$$

f) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -2$ avec les vecteurs propores respectivement $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

h)

$$\left\{ \begin{array}{c} u' = -u^2 - v^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left(u + v\right) \\ v' = -2v - 4uv - \frac{\varepsilon}{2}\left(u + v\right) \end{array} \right.$$

i) $E_c = \{(u, v) : v = 0\}$
j) $W_c = \left\{(u, v, \varepsilon) : v = -\frac{1}{4}\varepsilon u + ...\right\}$
k) le système réduit est

$$u' = -u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon u + ...$$

la bifurcation est transcritique.