Université de Tlemcen, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
Master: Biomathématiques et Modélisation 07/06/2021

Examen final

Modélisation mathématique en épidémiologie

Exercice 1. Considérons une population de taille N soumise à une maladie infectieuse:
- On note $S(t)$ le nombre de personnes susceptibles d'être infectées à l'instant t : on parle en général dans ce contexte de "personnes susceptibles".
- On note $E(t)$ le nombre de personnes infectées en phase latente, autrement dit non encore infectieuses;
- On note $I(t)$ le nombre de personnes infectées;
- On note $R(t)$ le nombre de personnes retirées de la transmission, on suppose que les personnes guéries sont immunisées et conservent leur immunité sans limite de temps.

Ainsi $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ est la population totale. Le modèle S-E-I-R est donné par:

$$\frac{dS}{dt} = -aS\frac{I}{N}, \tag{0.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = aS\frac{I}{N} - cE. \tag{0.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = cE - bI. \tag{0.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = bI, \tag{0.4}$$

où a est le taux de contact effectif ($a > 0$), c est le taux auquel les personnes infectées dans la phase latente deviennent infectieuses ($c > 0$) et b est le taux auquel les personnes quittent le compartiment I pour se retrouver dans le compartiment R ($b > 0$). Les conditions initiales sont $S(0) = N - E_0 - I_0$, $E(0) = E_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = 0$, avec $E_0 > 0, I_0 \geq 0$ et $0 < E_0 + I_0 < N$.

2pts 1. Montrer que le système (0.1)-(0.4) a une unique solution définie pour tout $t > 0$. De plus, $S(t) > 0$, $E(t) > 0$, $I(t) > 0$ et $R(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

2pts 2. Calculer la durée de la période d'infectiosité.

1pt 3. Au début d'une épidémie, calculer en moyenne combien une personne infectée contaminera de nouvelles personnes.

3pts 4. Montrer que la fonction $S(t)$ est strictement décroissante et converge vers une limite $S_\infty > 0$. La fonction $R(t)$ est strictement croissante et converge vers une limite R_∞ avec $S_\infty + R_\infty = N$. De plus, $E(t) \to 0$ et $I(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

3pts 5. Donner la taille finale de l'épidémie en l'absence complète d'intervention.

3pts 6. Au début de l'épidémie, estimer $E(t) + I(t) + R(t)$ en fonction de $R(t)$ seul.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 Le modèle $SITR$ est donné par

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S[I + \delta T] \\ I' &= \beta S[I + \delta T] - (\alpha + \gamma)I \\ T' &= \gamma I - \eta T \end{aligned}$$

où S est la classe des susceptibles. I est la classe des infectés. T est la classe des individus soumis au traitement et R la classe des guéris. β le taux de transmission de l'épidémie. γ est le taux de personnes soumis au traitement, α est le taux mortalité dû à l'épidémie, on suppose que le traitement réduit le taux d'infection par une fraction δ.

2pts 1. Démontrer que $S_\infty = \lim_{t\to\infty} S(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} T(t) = 0$.

0,2pt 2. Calculer le nombre de reproduction de base.

3pts 3. Donner l'équation de la taille finale de l'épidémie.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1:

1) Théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution du système avec les conditions initiales données sur un intervalle maximal $[0;T[$, on a aussi

$$S(t)=S(0)\,e^{\frac{-a}{N}\int_0^t I(u)du} \geq 0 \quad \text{pour tout } 0<t<T$$

Posons

$$X(t)=\begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix}, \quad F(t)=\begin{pmatrix} -c & aS(t)/N \\ c & -b \end{pmatrix}$$

on a $\dfrac{dX}{dt}=F(t)X(t)$

On a $X(0)\geq 0$ $\quad X(0)\neq 0$ puisque $E(0)+I(0)>0$

Comme les termes non diagonaux de la matrice $F(t)$ sont >0

$\Rightarrow E(t)>0$ et $I(t)>0$ (voir cours)

Comme $R(t)=b\int_0^t I(u)du$

on a aussi $R(t)>0$ $\forall t\in[0,T[$

Puisque $\dfrac{d}{dt}(S+E+I+R)=0$

On a $S(t)+E(t)+I(t)+R(t)=S(0)+E(0)+I(0)+R(0)=N$

et $0<S(t)<N$ $0<E(t)<N$, $0<I(t)<N$, $0<R(t)<N$.

pour tout $0\leq t<T$

Il en resulte que $T=+\infty$

le système a bien une unique solution définie pour tout $t>0$.

Scanné avec CamScanner

2) Période d'infectiosité

du Modèle on déduit que la durée d'infectiosité est $\frac{1}{b}$

3) Calculer de R_0

$$R_0 = \frac{a}{b}$$ (voir la démonstration dans le cours)

4)

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N} < 0$$

La fonction $S(t)$ est donc strictement décroissante et minorée par 0. elle converge vers une limite S_∞ q^t $t \to +\infty$

De même

$$\frac{dR}{dt} = bI > 0$$

La fonction $R(t)$ est donc croissante (strictement) est majorée par N. Elle converge vers une limite R_∞ q^t $t \to +\infty$.

On a

$$\frac{d}{dt}(I+R) = cE > 0$$

donc la fonction $I+R(t)$ est croissante et majorée par N Elle converge vers une limite. Donc $I(t)$ converge vers une limite aussi I_∞. Mais

$$b\int_0^{+\infty} I(u)\,du = R(t) \leq N$$

donc $I_\infty = 0$ la fonction $E(t) = N - S(t) - I(t) - R(t)$ converge aussi vers une limite E_∞.

Comme $c\int_0^t E(v)\,dv = I(t) + R(t) - I(0) \leq N$

on a $E_\infty = 0$

on obtient à la limite $S_\infty + R_\infty = N$

Scanné avec CamScanner

Ainsi $\frac{dR}{dt} = -\frac{bN}{as}\frac{ds}{dt}$

$$R(t) = -\frac{bN}{a}\ln\frac{S(t)}{S(0)}$$

~~Posons $x_\infty = \frac{S_\infty}{N}$~~

$$S_\infty = N - R_\infty = N + \frac{bN}{a}\ln\frac{S_\infty}{S_0}$$

Cette équation détermine S_∞ et donc aussi la taille finale de l'épidémie R_∞.

6) Au début de l'épidémie $S(t) \simeq N$

$$\frac{dE}{dt} \simeq aI - cE$$

$$\frac{dI}{dt} = cE - bI$$

$$\frac{dR}{dt} = bI$$

Pour une date $t \leq T$

$$\frac{dS}{dt} = -aS\frac{I}{N} \simeq -aI = -\frac{a}{b}\frac{dR}{dt} \simeq -R_0\frac{dR}{dt}$$

donc en intégrant, $S(t) \simeq S(0) - R_0 R(t)$

donc

$$E(T) + I(T) + R(T) = N - S(T) \simeq N - S(0) + R_0 R(T)$$

$$\simeq R_0 R(T).$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 02:

1) Même raisonnement comme dans l'exercice 1. on trouve

$$S_\infty = \lim_{t\to+\infty} S(t) > 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} T(t) = 0$$

2) Nombre de reproduction de base.

A partir du modèle, on déduit qu'une personne infectée infecte βN nouvelles personnes dans une population totalement sain, et la période d'infectiosité est $\frac{1}{\alpha+\gamma}$.

En plus, une fraction $\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$ des infectés est traitée,

Durant cette période de traitement, le nombre de nouvelles infection causée par une personne infectée sous traitement par unité de temps est $\delta\beta N$; le temps moyen de traitement est $\frac{1}{\eta}$ aussi

$$R_0 = \frac{\beta N}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\,\frac{\delta\beta N}{\eta}.$$

Deuxième Methode $R_0 = \rho(-FV^{-1})$

Où $\rho(M)$ est le rayon spectral de la matrice M (voir le cours).

Scanné avec CamScanner

3) Taille finale de l'épidémie

Intégrons la première équation du système, on obtient

$$\ln \frac{S_0}{S_\infty} = \int_0^{+\infty} \beta(I(t) + \delta T(t))dt = \beta \int_0^{+\infty} [I(t) + \delta T(t)]dt$$

Intégrons la 3ième équation du système, on obtient

$$\gamma \int_0^{+\infty} I(t)dt = \eta \int_0^{+\infty} T(t)dt$$

Intégrons (1ère équation + 2ième équation), on obtient

$$N - S_\infty = (\alpha + \gamma) \int_0^{+\infty} I(t)dt$$

Tenons en compte l'expression de R_0, on obtient

$$\ln \frac{S_0}{S_\infty} = R_0 \left[1 - \frac{S_\infty}{N}\right]$$

SHOT ON MI A2
MI DUAL CAMERA

Scanné avec CamScanner