Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2020/2021*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Master Biomathématiques et Modélisation

Final : Méthodes de Réduction II

30 mai 2021

Exercice 1 :

Le système $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ suivant s'écrit en coordonnées cylindriques $(\tilde{\mathbf{P}}_\varepsilon)$.

$$(\mathbf{P}_\varepsilon)\quad \begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= y + x(1-x^2-y^2)^3,\\ \varepsilon\dot{y} &= -x + y(1-x^2-y^2)^3,\\ \dot{z} &= -x^2 z, \end{aligned}$$

$$(\tilde{\mathbf{P}}_\varepsilon)\quad \begin{aligned} \varepsilon\dot{r} &= r(1-r^2)^3,\\ \varepsilon\dot{\theta} &= -1,\\ \dot{z} &= -zr^2\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Montrer que l'équation rapide admet un unique cycle limite stable. Peut-on appliquer le théorème de Pontryagin-Rodygin classique (1960)?

Donner, en justifiant les conclusions, les approximations des solutions du problème $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ sur un intervalle de temps non borné, et en déduire un résultat de stabilité pratique.

Exercice 2 :

Soit le système

$$(M)\quad \begin{cases} \dot{x} = x(\lambda(z) - 4x - y),\\ \dot{y} = y(\mu(z) - x - y),\\ \dot{z} = \delta(z),\\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

où les fonctions λ, μ, δ : R → R sont de classe C^1 avec $\delta(z) = 0$ ssi $z = 0$. On suppose que les solutions de (M) sont définies pour tout t.

1. Donner des conditions générales sur λ, μ et δ pour que le système (M) puisse être réduit dans le cadre de la théorie des systèmes asymptotiquement autonomes à un modèle de compétition de Lotka-Volterra (LV)entre deux espèces de densités respectives $x(t)$ et $y(t)$.
2. Sous quelles conditions supplémentaires sur λ et μ le problème réduit limite (LV) obtenu assure-t-il la coexistence des deux espèces?
3. Sous ces conditions, montrer que les orbites de conditions initiales non nulles de (M) convergent toutes vers un équilibre stable à l'aide du théorème de convergence de Thieme. Auriez-vous pu obtenir ce résultat en étudiant directement le modèle (M) sans réduction?

Exercice 3 :

Soit le modèle biologique, appelé modèle de prédation 'donor control' et dans lequel la proie de densité x se développe nettement plus vite que le prédateur de densité y,

$$(S_\varepsilon)\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = rx(1-x)-(c+\varepsilon)x, \\ \dot{y} = ecx - dy, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon << 1,$$

avec $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ et r, c, e et d des paramètres strictement positifs.

1. Dans le cadre de *la théorie de Tikhonov* pour les systèmes lents-rapides, déterminer et dessiner toutes les composantes attractives et répulsives de la variété lente, selon les paramètres.

2. Supposons que $r > c$. Montrer que le modèle (S_ε) admet un point $E^*(x^*,y^*)$ à préciser qui soit $S.G.P.A.S.$ quand $\varepsilon \to 0$ pour toute condition initiale $(x_0 > 0, y_0 \geq 0)$? Préciser ce qui est apparent dans cette stabilité et dessiner le portrait de phase approximatif.

3. Supposons toujours que $r > c$. A l'aide du 1er *Théorème de Fenichel*, dont on vérifiera l'applicabilité, déterminer une approximation $O(\varepsilon^2)$ de la variété invariante attractive de Fenichel et le problème réduit correspondant. Quel résultat de stabilité peut-on déduire par la théorie de Fenichel ?

Citation : […] une bonne partie des mathématiques devenues utiles se sont développées sans aucun désir d'être utiles, dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quels domaines elles deviendraient utiles. Il n'y avait aucune indication générale qu'elles deviendraient utiles. C'est vrai de toute la science.

-John Von Neumann-

Corrigé du Final : Méthodes de Réduction II (30 Mai 2021)

AU: 2020/2021

Exercice 1

Equation rapide (en coordonnées polaires)

$$(ER)\begin{cases} r' = r(1-r^2)^3 =: f(r) \\ \theta' = -1 \end{cases}$$ z paramètre, $(\,)' = \frac{d}{dc}$, $c = \frac{t}{\varepsilon}$ (0,5)

$f'(r) = (1-r^2)^3 + 3r(1-r^2)^2(-2r)$

d'où $f'(0) = 1 > 0$ et $f'(1) = 0$. (0,5)

Comme $\theta' = -1$, $(0,0)$ est un equilibre instable (repeller)

et, à $r=1$, il correspond un cycle limite $\Gamma_t = C(0,1)$ (0,25)

(cercle de centre 0 et de rayon 1).

$f'(1) = 0$ signifie que Γ_t est asymptotiquement stable pour l'approximation linéaire et non exponentiellement. (0,50)

Le théorème de Pontryagin-Rodygin de 1960 (l'original) n'est donc pas applicable. (0,5)

Cependant, la version de 2004 l'est.

En effet : * tous les problèmes ont la propriété d'existence et d'unicité. (0,25)

* ER admet un cycle limite $\Gamma_t = C(0,1)$ A-stable uniformément $/ z \in K \underset{cpt}{\subset} \mathbb{R}$ et il existe une famille

de fonctions périodiques $(u^*(\tau,t), y^*(\tau,t))$ d'orbite Γ_t de période 2π, par exemple

$$(u^*(\tau,t), y^*(\tau,t)) = (\sin\tau, \cos\tau).$$

0,50

Équation terminale.

EL. $$\dot z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -u^{*2}(\tau,t)\cdot z\, d\tau$$

$$= -\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\tau\, d\tau = -\frac{z}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\tau)\,d\tau$$

$$= (\dots) = -\frac{z}{2}.$$

(E.L) $\dot z = -\frac{z}{2}$ $\quad z \in \mathring{K}$

1

On se réfère aux équations

(ECL) (cycle limite) $\begin{cases} u' = y + u(1-u^2-y^2)^3 & u(0)=\alpha_0 \\ y' = -u + y(1-u^2-y^2)^3 & y(0)=\beta_0 \end{cases}$

et P.R (problème radial) $\quad \dot z = -\frac{z}{2}, \quad z(0) = z_0 \in \mathring{K}$

On suppose que (α_0,β_0) est dans le bassin d'attraction de Γ_0 pour (E.R) [i.e. $(\alpha_0,\beta_0)\in\mathcal{E}(0,0)$] et que $z_0 \in \mathring{K}$.

Supposons par ailleurs que $0 \in \mathring{K}$.

Comme $z=0$ est un équilibre asymptotiquement stable de (E.L), alors, le théorème de Pontryagin-Rodygin pour les temps infinis s'applique :

0,50

si $(\tilde{u}(\tau), \tilde{y}(\tau))$ est la solution de $(E(L))$ définie pour tout $\tau \geq 0$ et $\bar{z}(t)$ est la solution de (PR) définie pour tout $t \geq 0$, alors la solution $(u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ de (P_ε) est définie pour tout $t \geq 0$, pourvu que ε soit assez petit et l'on a : 0,50

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (u(\varepsilon\tau, \varepsilon), y(\varepsilon\tau, \varepsilon)) = (\tilde{u}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \quad \forall \tau \geq 0$$ 0,50

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t) \quad \forall t \geq 0$$ 0,50

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{dis}\left((u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)), \Gamma_{\bar{z}(t)}\right) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{où } \Gamma_{\bar{z}(t)} = C(0,1)$$ 0,50

Ainsi $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ t \to +\infty}} \operatorname{dis}\left((u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)), \Gamma_0 \times \{0\}\right) = 0$$ 0,5

où $\Gamma_0 = C(0,1)$. C.à.d que la courbe fermée $\Gamma_0 \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^3$ est SGPAS quand $\varepsilon \to 0$ pour (P_ε) pourvu que $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$. 0,5

Exercice 2

1°/ Noter que 0 est le seul équilibre de $\dot{z} = f(z)$.
Pour qu'il soit asymptotiquement stable, il suffit que $z f(z) < 0$ ou que $f'(0) < 0$ (ou que f soit linéaire de type $f(z) = az$, $a < 0$).
Ainsi la solution $z(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

0,5

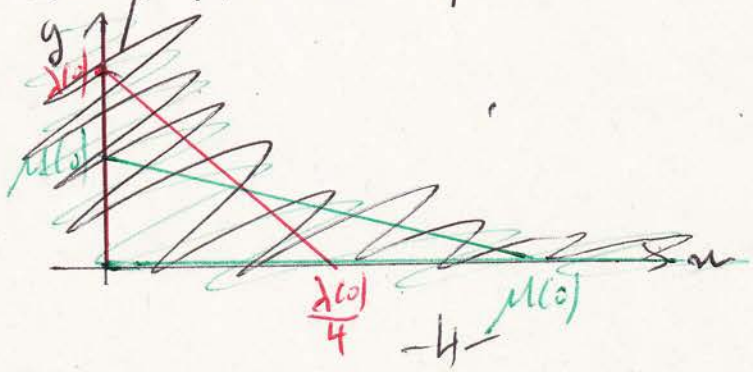
Comme il s'agit de remplacer dans les 2 premières équations de (T), z par $z(t)$ puis de faire tendre $z(t)$ vers 0 pour obtenir le système limite

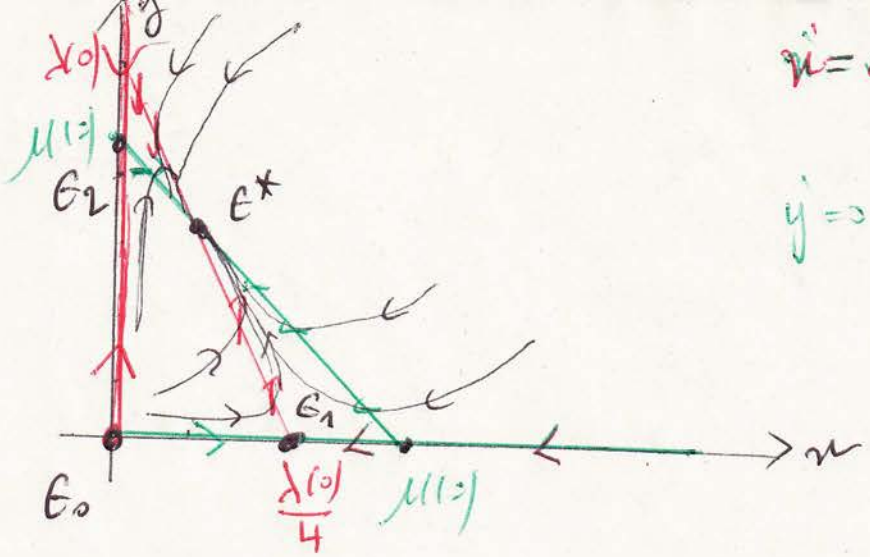
$$(L.V) \begin{cases} \dot{x} = x(\lambda(0) - 4x - y) \\ \dot{y} = y(\mu(0) - x - y) \end{cases}$$

que nous voulons être un modèle de compétition de Lotka-Volterra, il est nécessaire que $\lambda(0) > 0$ et $\mu(0) > 0$

0,5

2°/ Pour que (L.V) soit dans la configuration d'existence d'un équilibre de coexistence, les 2 isoclines non triviales de (L.V) doivent être dans la portion indiquée par la figure ci-dessous.





$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = -4x + \lambda(0)$

$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -x + \mu(0)$

C'est-à-dire que $\frac{\lambda(0)}{4} < \mu(0)$ et $\mu(0) < \lambda(0)$

i.e $\underline{\mu(0) < \lambda(0) < 4\mu(0)}$

3°/ Posons $f_1(x,y,t) = x(\lambda(t) - 4x - y)$
$f_2(t,y,t) = y(\mu(t) - x - y)$ qui sont C^1

Soit $D = \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$ et que les plans $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ sont invariants, alors D est invariant.

. Comme $t(t) \to 0$ et que le système limite est un système classique de L.V., (D) est dissipatif.

<u>H1</u>: La linéarisation de $f(t)$ en 0 donne la forme at, alors

<u>H2</u>. Le système limite (LV) admet 4 équilibres (voir figure) $E_0(0,0)$, $E_2(0,\mu(0))$, $E_1(\frac{\lambda(0)}{4}, 0)$ et $E^*(x^*,y^*)$ intérieur, tous hyperboliques [inutile de vérifier, utiliser les prop. du modèle de compétition]

H3 : D'après les propriétés du modèle de Lotka-Volterra, E_0 est répulsif d'où $\dim W^s(E_0) = 0 < 2$ (0,5)

E_1 et E_2 sont deux points-selles d'où $\dim W^s(E_i) = 1 < 2$, $i=1,2$

E^* est asymptotiquement stable, d'où $\dim W^s(E^*) = 2$.

H4 Soit $\Omega = \mathbb{R}^2_+$. Soit $(x(t),y(t)) \in \Omega$. (0,5)

si $x>0$, $y>0$, alors $(x(t),y(t)) \in W^s(E^*)$

si $x=0$, $y>0$, alors $(x(t),y(t)) \in W^s(E_2)$

si $x>0$, $y=0$, alors $(x(t),y(t)) \in W^s(E_1)$

si $(x,y)=(0,0)$, $(x(t),y(t)) \in W^s(E_0)$.

Donc $\Omega = W^s(E_0) \cup W^s(E_1) \cup W^s(E_2) \cup W^s(E^*)$.

H5 : Acyclicité : Les seules chaînes sont : (0,5)

$E_0 \longrightarrow E_1$, $E_0 \longrightarrow E_2$, $E_0 \longrightarrow E^*$,

$E_1 \longrightarrow E^*$, $E_2 \longrightarrow E^*$. Donc pas de chaîne fermée.

D'après le théorème de Thieme, toute solution $(x(t),y(t),z(t))$ de (T) convergent vers un des équilibres $\tilde{E}_0(0,0,0)$, $\tilde{E}_1(\frac{\lambda(0)}{\mu},0,0)$, $\tilde{E}_2(0,\mu(0),0)$ ou $\tilde{E}^*(x^*,y^*,0)$.

Si $x(0)>0$, $y(0)>0$, $z(0)>0$, la solution converge vers $\tilde{E}^*$ (0,5)

et cet équilibre est G.A.S.

Notons que par cette méthode nous avons gagné la globalité de l'attractivité qu'une simple linéarisation de (T) autour de $\tilde{E}^*$ n'aurait pas assuré. (0,5)

Exercice 3

1°/ (E.R) $x' = \underbrace{rx(1-x) - cx}_{f(x)}$, y paramètre $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$, $c = \frac{h}{\varepsilon}$. (0,5)

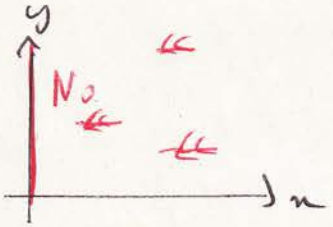
Variété lentes $\underbrace{x = 0}_{N_0}$ ou $\underbrace{x = \frac{r-c}{r}}_{M_0}$. (0,50)

M_0 existe si $r \geq c$. Elle est non triviale si $\underline{\underline{r > c}}$.

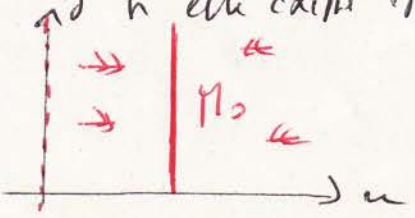
<u>Attractivité</u>, $f'(x) = r - 2rx - c$

d'où $f'(0) = r - c$ c.à.d que N_0 est attractive si $r < c$

$f'\left(\frac{r-c}{r}\right) = -r + c$ c.à.d que M_0 est attractive si elle existe d'où $\underline{r > c}$. (1)



$r < c$



$r > c$

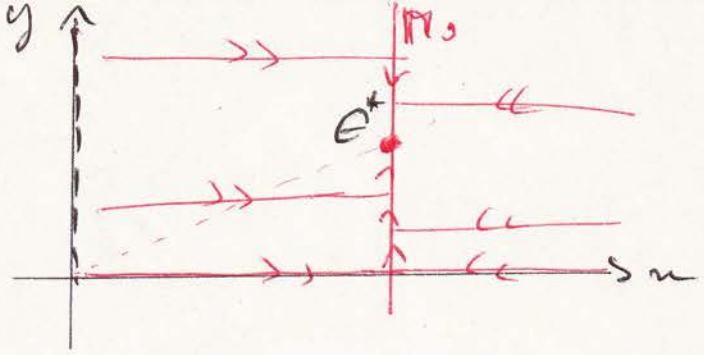
2°/ $\underline{r > c}$. Il nous suffit de montrer que l'équation lente admet un équilibre G.A.S.

Or (EL), $\dot{y} = \varepsilon c\left(\frac{r-c}{r}\right) - dy$, $y \in \mathring{K}$, $K \underset{cpt}{\subset} \mathbb{R}_+$ (0,5)

admet $0 < y^* = \frac{\varepsilon c}{d}\left(\frac{r-c}{r}\right)$ comme équilibre GAS. (0,5)

On suppose que $y^* \in \mathring{K}$.

Ainsi $E^* = \left(x^* = \frac{r-c}{r}, y^* = \frac{\varepsilon c}{d}\left(\frac{r-c}{r}\right)\right)$ est SGPAS quand $\varepsilon \to 0$ pour le modèle (SE), pour tout condition initiale (x_0, y_0) telle que $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$ (voir figure) (0,5)



Sachant que E^* n'est pas équilibre, tout est apparemment stratifié, stabilité, attractivité globale ! 0,5 0,25

3°/ $r > c$. Notons que le système (S_ε) est de la forme
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,\varepsilon) := rx(1-x) - (c-\varepsilon)x \\ \dot{y} = g(x,y) = exx - dy \end{cases}$$
La dépendance de f par rapport à ε doit être prise en compte.

<u>H1</u> : f, g sont de classe C^∞ / x, y, ε. 0,25

<u>H2</u> : La variété critique M_0 non triviale est normalement hyperbolique puisque attractive d'après la 1ère équation $\left[f'\left(\frac{r-c}{r}\right) = -r+c > 0 \quad (c \neq 0) \right]$ 0,5

Pour $y \in K \subset \mathbb{R}_+$, M_0 est le graphe de la fonction $h_0(y) = \frac{r-c}{r}$.

~~Le calcul va~~ D'après le théorème de Fenichel, il existe, pour ε assez petit, une fonction $h_\varepsilon : K \to \mathbb{R}_+$ dont le graphe $M_\varepsilon = \{(x,y) : x = h_\varepsilon(y)\}$ est localement invariant, avec $h_\varepsilon \to h_0$. 0,5

On cherche une approximation de h_ε comme solution de l'EDP $f(h_\varepsilon(y), y, \varepsilon) = \varepsilon\, h_\varepsilon'(y) \cdot g(h_\varepsilon(y), y)$,

avec $h_\varepsilon(y) = h_0(y) + \varepsilon h_1(y) + O(\varepsilon^2)$

On montre que $h_1(y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(h_0(y), y, 0)\right]^{-1} \cdot \left(h_0'(y) \cdot g(h_0(y), y) - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(h_0(y), y, 0)\right)$ 0,5

avec $\frac{\partial f}{\partial x}(h_0(y), y, 0) = -r + c$

$h_0'(y) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(h_0(y), y, 0) = -h_0(y) = \frac{-r+c}{r}$

D'où $h_0(y) = \frac{r-c}{r}$ 0,5

$h_1(y) = \frac{1}{-r+c} \cdot \frac{-r+c}{r} = \frac{1}{r}$

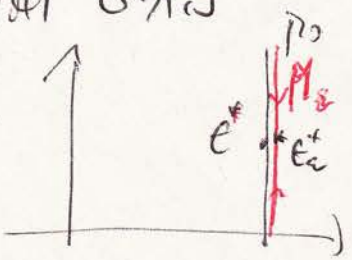
D'où $h_\varepsilon(y) = \frac{r-c}{r} + \frac{1}{r}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

~~dont le graphe~~

Problème réduit sur $\tilde{\Pi}_\varepsilon$, $O(\varepsilon)$ après Π_ε 0,25

$$(P.R_F)\quad \dot{y} = ec\left[\frac{r-c}{r} + \frac{1}{r}\varepsilon\right] - dy$$

- Comme le champ sur Π_0 persiste sur Π_ε, on peut déduire qu'il existe une équilibre e_ε^* sur Π_ε qui soit GAS pour tout c.i (x_0, y_0) tq $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$. 0,25



 Fin