

Examen final

Exercice 1 (10pts)

On considère le modèle SIR suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = \mu N(t) - \beta \frac{S(t)}{N(t)} I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta \frac{S(t)}{N(t)} I(t) - (\mu + \alpha) I(t), \\ R'(t) = \alpha I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1)$$

avec $(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Supposons aussi que tous les paramètres sont strictement positive. $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \alpha}$. On définit aussi le domaine suivant :

$$\Omega = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3, S > 0, I > 0, R > 0\}.$$

- 1- Montrer, en argumentant en détail votre réponse, que Ω est positivement invariant.
- 2- En utilisant la fonction suivante :

$$V(S, I, R) = I,$$

montrer que le point d'équilibre $(N, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $R_0 < 1$.

Exercice 2 (4 pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + v(x)u'(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

où $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ et $v \in C([0, 1]; \mathbb{R}^-)$.

Supposons que $u_i, i = 1, \dots, N$ est la solution numérique correspondant au problème (2).

1- Proposer un schéma numérique différences finies pour le problème (2)

2- Donner la définition de l'erreur de consistance.

Exercice 3 (6 pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t(t, x) - c(x)u_{xx}(t, x) = 0, & t \in (0, T), \quad x \in (0, 1), \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (3)$$

où $T > 0$, $c \in C([0, 1]; \mathbb{R}_+^*)$ et $u_0 \in C([0, 1]; \mathbb{R}^+)$.

Supposons que, u_i^n , $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M$ les solutions numériques correspondant à la solution du problème (3), soient positives.

1-Proposer un schéma numérique différences finies **explicite** pour le problème (3).

2- Sous quelle condition sur la donnée $c(x)$ le schéma (3) est-il stable numériquement? Justifier