Université Abou-Beke Belkaid
Faculté des Sciences
Départment de Mathématiques
Année Universitiare 2020-2021.
1.ère année Master BioMath

EPREUVE FINALE: EDP II.

Exercice 1

I- Soit $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R)$, montrer que

$$\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$$

ou $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ avec $\sup_{I\!R} |\psi(x)| \leq C \sup_{I\!R} |\phi'(x)|$.
II- Soit T la forme linéaire définie sur $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R)$ par

$$T(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\phi(\frac{1}{j}) - \phi(0)\right).$$

1. Montrer que T est bien définie et que c'est une Distribution.
2. Donner une estimation supérieure fine de l'ordre de T.
3. Déterminer le support de T.

Exercice 2

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R)$ telle que $\phi \neq 0$. On pose $\phi_n(x) = \phi(x+n)$.

1. Etudier la convergence puntuelle de la suite $\{\phi_n\}_n$.
2. La suite $\{\phi_n\}_n$ converge t'elle dans $L^1(I\!R)$.
3. On pose $T_n \equiv T_{\phi_n}$. Montrer que $T_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(I\!R)$.
4. On suppose maintenant que $\phi \geq 0$ et que $\int_{I\!R} \phi(x)dx = 1$. On pose $\psi_n(x) = n\phi(nx)$. Soit la distribution $S_n \equiv S_{\psi_n}$. Montrer que $S_n \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(I\!R)$.

Exercice 3

Soit $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset I\!R^2$. Pour $k \geq 1$, On considere la suite $\{u_k\}_k$ definie par

$$u_k(x,y) = \frac{1}{\sqrt{k}}(1-y)^k sin(kx).$$

1-Montrer que $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$.
2-Montrer que $u_k \to 0$ dans $L^\infty(\Omega)$.
3-Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||u_k||_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \ \forall k$.
4-Déduire qu'il existe une sous suite de $\{u_k\}_k$ qui converge ver 0 faiblement dans $W^{1,2}(\Omega)$.