Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2020-2021
Module : Contrôle Optimal
Date : 03-06-2021

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL

Exercice : Commande optimale d'un réacteur chimique.

Un réacteur chimique industriel permet de fabriquer un produit à partir d'un réactif par une réaction irréversible du premier ordre avec dégagement de chaleur. Pour refroidir le réacteur, on fait circuler le contenu à travers un échangeur thermique ; la chaleur passe ainsi dans le liquide de refroidissement qui circule dans le circuit secondaire de l'échangeur avec un débit $u(t)$. Après diverses réductions de modèle, le système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -a_1 x_1(t) - k x_1(t) e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + r_1 \\ \dot{x_2}(t) = a_3(a_4 - x_2(t)) + a_5 k x_1(t) e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + a_6(u(t) - x_2(t)) - r_2 \end{cases}$$

où $x_1(t)$ est la concentration du réactif au temps t, $x_2(t)$ est la température du réacteur au temps t, et r_1 et r_2 sont des réels strictement positifs. Par ailleurs, les coefficients k et a_2 et a_6 sont des nombres réels strictement positifs et a_i, $i = 1,3,4,5$ sont des nombres réels positifs. On suppose que le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$-M \leq u(t) \leq M,$$

où M est un réel strictement positif. Soit $T > 0$ un **temps final fixé**. Dans ce qui suit, l'état initial est fixé :

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0,$$

et l'état final $(x_1(T), x_2(T))$ est **libre**.

Première partie : 10 points.

Dans cette première partie, on cherche à minimiser la quantité de réactif $x_1(T)$.

On note les variables adjointes λ_1 et λ_2.

(a) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal.

(b) Montrer que les équations des extrémales sur le vecteur adjoint sont données par

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = (a_1 + ke^{-\frac{a_2}{x_2(t)}})\lambda_1(t) - a_5 ke^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = kx_1(t)\frac{a_2}{x_2^2(t)}e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\lambda_1(t) + \left(a_3 + a_6 - a_5 kx_1(t)\frac{a_2}{x_2^2(t)}e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right)\lambda_2(t). \end{cases}$$

(c) Écrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.
(d) Montrer que le contrôle optimal noté u est donné par

$$u(t) = \begin{cases} -M \text{ si } \lambda_2(t) > 0, \\ M \text{ si } \lambda_2(t) < 0. \end{cases}$$

(e) Vérifier que $\dot{\lambda}_2(T) > 0$.
(f) En déduire que $u(t) = M$ sur $[T-\varepsilon, T]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit.
(g) On suppose que $a_5 = 0$.
(g1) Montrer que $\lambda_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.
(g2) En déduire que $\lambda_2(t) < 0$, pour tout $t \in [0,T[$.
(g3) En déduire l'expression du contrôle optimal $u(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Deuxième partie : 10 points.

Dans cette deuxième partie, on cherche toujours à minimiser la quantité de réactif $x_1(T)$, mais en minimisant aussi la température $x_2(t)$ au cours de la réaction, et l'énergie fournie.

Le compromis choisi et de chercher à minimiser le coût

$$C_T(u) = x_1(T) + \int_0^T \left(u^2(t) + \beta x_2^2(t)\right) dt,$$

où $\beta \geq 0$ est fixé.
(a) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations des extrémales.
(b) Écrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.
(c) Détailler la condition de minimisation du principe du maximum de Pontriaguine, et donner l'expression des contrôles optimaux.
(d) Montrer que $u(t) = -\frac{1}{2}a_6\lambda_2(t)$, pour tout $t \in [T-\varepsilon_1, T]$ avec $\varepsilon_1 > 0$ suffisament petit.
(e) On suppose que $a_5 = \beta = 0$. Démontrer que le contrôle optimal est strictement positif sur $[0,T[$, et préciser son expression.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2020-2021
Module : Contrôle optimal.

Corrigé de l'examen final du Jeudi 03 juin 2021

Exercice

Première partie : 10 points.

(a) Le Hamiltonien du problème de contrôle optimal : 1 pt.

On note par H le Hamiltonien.

On a,

$$H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \lambda_1(t)\left(-a_1 x_1(t) - k\, x_1(t)\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + r_1\right)$$

$$+ \lambda_2(t)\left(a_3\left(a_4 - x_2(t)\right) + a_5 k\, x_1(t)\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + a_6\left(u(t) - x_2(t)\right) - r_2\right).$$

(b) Les équations des extrémales sur le vecteur adjoint : 2 pts

On a,

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \left(a_1 + k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right)\lambda_1(t) - a_5 k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\, \lambda_2(t).$$

De même,

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= k\, x_1(t)\, \frac{a_2}{x_2^2(t)}\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\, \lambda_1(t)$$

$$+ \left(a_3 + a_6 - a_5 k\, x_1(t)\, \frac{a_2}{x_2^2(t)}\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right)\lambda_2(t).$$

(c) Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint : 1 pt.

On pose $\Psi(x_1(T), x_2(T)) = x_1(T)$.

Alors $\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1(T), x_2(T)) = 1,$

et $\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1(T), x_2(T)) = 0.$

(d) L'expression du contrôle optimal u en fonction du vecteur adjoint : 2 pts.

On a,

$$H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u) = \min_{\vartheta \in [-M, M]} H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \vartheta).$$

Ce qui donne,

$$a_6 \lambda_2(t) u(t) = \min_{\vartheta \in [-M, M]} a_6 \lambda_2(t) \vartheta.$$

C'est-à-dire,

$$\lambda_2(t) u(t) = \min_{\vartheta \in [-M, M]} \lambda_2(t) \vartheta.$$

Alors,

$$u(t) = \begin{cases} -M & \text{si } \lambda_2(t) > 0, \\ M & \text{si } \lambda_2(t) < 0. \end{cases}$$

(e) Vérifions que $\dot{\lambda}_2(T) > 0$: 0,5 pts

On a,

$$\dot{\lambda}_2(T) = k x_1(T) \frac{a_2}{x_2^2(T)} e^{-\frac{a}{x_2(T)}} \lambda_1(T) + \underbrace{\left(a_3 + a_6 - a_5 k x_1(T) \frac{a_2}{x_2^2(T)} e^{-\frac{a_2}{x_2(T)}}\right)}_{\lambda_2(T)}.$$

$$= k\, x_1(T)\, \frac{a_2}{x_2^2(T)}\, e^{-\frac{a}{x_2(T)}}$$

$$> 0.$$

(f) En déduire que $u(t) = M$ sur $[T-\varepsilon, T]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit : 1pt.

Comme $\lambda_2(T) = 0$ et $\dot{\lambda}_2(T) > 0$, alors par continuité de la fonction $t \longmapsto \lambda_2(t)$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda_2(t) < 0$, pour tout $t \in [T-\varepsilon, T[$. Ce qui entraîne que $u(t) = M$ sur $[T-\varepsilon, T]$.

(g) On suppose $a_5 = 0$.

(g1) Montrons que $\lambda_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$: 1pt.

Comme $a_5 = 0$, on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = \left(a_1 + k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right) \lambda_1(t), \\ \lambda_1(T) = 1. \end{cases}$$

On pose par définition

$$p(t) = -\int_0^t \left(a_1 + k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(s)}}\right) ds.$$

Alors,

$$\left(e^{p(t)}\, \lambda_1(t)\right)' = 0.$$

Ce qui donne

$$e^{p(t)}\, \lambda_1(t) = e^{p(T)}\, \lambda_1(T).$$

C'est-à-dire

$$\lambda_1(t) = e^{p(T) - p(t)}$$

$$= e^{-\int_t^T \left(a_1 + k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(s)}}\right) ds} > 0.$$

(g2) En déduire que $\lambda_2(t) < 0$, pour tout $t \in [0, T[$: 1 pt.

Comme $a_5 = 0$ et $\lambda_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$, alors on a :

$$\dot{\lambda}_2(t) > (a_3 + a_6)\, \lambda_2(t).$$

C'est-à-dire,

$$\left(e^{-(a_3+a_6)t}\ \lambda_2(t)\right)' > 0$$

C'est-à-dire la fonction $t \longmapsto e^{-(a_3+a_6)t}\ \lambda_2(t)$

est strictement croissante sur $[0, T]$.

Ce qui donne,

$$e^{-(a_3+a_6)t}\ \lambda_2(t) < e^{-(a_3+a_6)T}\ \lambda_2(T), \text{ pour tout } t \in [0, T[.$$

Comme $\lambda_2(T) = 0$ et la fonction exponentielle

est strictement positive, on obtient

$$\lambda_2(t) < 0, \text{ pour tout } t \in [0, T[.$$

(g3) En déduire l'expression du contrôle optimal $u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$: 0,5 pts.

D'après la question précédente et la question (d) il résulte que $u(t) = M$ sur $[0, T]$.

Deuxième partie

(a) Le Hamiltonien et les équations des extrémales : 3 pts.

On note par H le Hamiltonien.

On a,

$$H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \lambda_1(t)\left[-a_1 x_1(t) - k\, x_1(t)\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + r_1\right]$$

$$+ \lambda_2(t)\left[a_3(a_4 - x_2(t)) + a_5 k\, x_1(t)\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + a_6(u(t) - x_2(t)) - r_2\right]$$

$$+ u^2(t) + \beta\, x_2^2(t).$$

Les équations des extrémales.

On a,

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \left(a_1 + k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right)\lambda_1(t) - a_5 k\, e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\lambda_2(t),$$

et

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= k\, x_1(t)\frac{a_2}{x_2^2(t)} e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\lambda_1(t) + \left(a_3 + a_6 - a_5 k\, x_2(t)\frac{a_2}{x_2^2(t)} e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right)\lambda_2(t)$$

$$- 2\beta\, x_2(t).$$

(b) Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint : 1pt.

Comme

$$\Psi(x_1(T), x_2(T)) = x_1(T).$$

Alors

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1(T), x_2(T)) = 1,$$

et

$$\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1(T), x_2(T)) = 0.$$

(c) La condition de minimisation du principe du maximum de Pontriaguine et l'expression des contrôles optimaux : 3pts.

On a,

$$H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u) = \min_{v \in [-M, M]} H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v).$$

Ce qui donne,

$$a_6 \lambda_2(t) u(t) + u^2(t) = \min_{v \in [-M, M]} \left(a_6 \lambda_2(t) v + v^2 \right).$$

On pose,

$$h(v) = a_6 \lambda_2(t) v + v^2, \quad v \in [-M, M].$$

Alors,

$$h'(v) = a_6 \lambda_2(t) + 2v.$$

Par suite,

$$h'(v) = 0 \text{ si et seulement si } v = -\frac{a_6 \lambda_2(t)}{2}.$$

Ainsi,

Si $-M < -\frac{a_6 \lambda_2(t)}{2} < M$, alors $u(t) = -\frac{a_6 \lambda_2(t)}{2}$.

Si $-\frac{a_6 \lambda_2(t)}{2} \leq -M$, alors $u(t) = -M$.

Si $-\frac{a_6 \lambda_2(t)}{2} \geq M$, alors $u(t) = M$.

(d) Montrons qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ suffisament petit tel que $u(t) = -\frac{a_6 \lambda_2(t)}{2}$ sur $[T - \varepsilon_1, T]$: 1 pt.

Comme $\lambda_2(T)=0$, alors $-\frac{a_6\lambda_2(T)}{2}=0\in]-M,M[$.

Par continuité de la fonction $t\longmapsto\lambda_2(t)$, on a

$$-\frac{a_6\lambda_2(t)}{2}\in]-M,M[\text{ pour tout } t\in[T-\varepsilon_1,T]$$

avec $\varepsilon_1>0$ suffisament petit et par suite

$$u(t)=-\frac{a_6\lambda_2(t)}{2} \text{ sur } [T-\varepsilon_1,T].$$

(e) On suppose que $a_5=\beta=0$. Montrons que le contrôle optimal est strictement positif sur $[0,T[$ et précisons son expression : 2pts.

Si $a_5=\beta=0$, on a :

$$\dot\lambda_1(t)=\left(a_1+k\,e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\right)\lambda_1(t),$$

et

$$\dot\lambda_2(t)=k\,x_1(t)\frac{a_2}{x_2^2(t)}e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}}\lambda_1(t)+(a_3+a_6)\lambda_2(t).$$

Comme $\lambda_1(T)=1$ et $\lambda_2(T)=0$, alors d'après la première partie on a $\lambda_2(t)<0$, pour tout $t\in[0,T[$.

Par suite d'après la question précédente, on obtient

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{a_6}{2}\lambda_2(t) & \text{si } -\frac{a_6\lambda_2(t)}{2} < M, \\ M & \text{si } -\frac{a_6\lambda_2(t)}{2} \geq M. \end{cases}$$