Département de Mathématiques
Université de Tlemcen

Module: Systèmes Dynamiques

Examen (Mars 2021, durée 1h30').

Exercice 1: 09 points

Soit le système

$$(1) \begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2 - 2x - 3) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2 - 2x - 3) \end{cases}$$

a) **02 points** Ecrire le système en coordonnées polaires et montrer que

$$r' = rf(r, \theta)$$

où f est une fonction à déterminer.

Solution: partons de la relation

$$r^2 = x^2 + y^2$$

on obtient

$$r' = r(3 + 2r \cos(\theta) - r^2) = rf(r, \theta)$$

et

$$\theta' = -1$$

b) Montrer que $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre du système (1). **(01 point)**

c) **02 points** calculer

$$\max_{\theta} f(r, \theta) \text{ et } \min_{\theta} f(r, \theta).$$

Solution: on a

$$\max_{\theta} f(r, \theta) = f(r, 0) = 3 + 2r - r^2$$

$$\min_{\theta} f(r, \theta) = f(r, \pi) = 3 + 2r - r^2$$

d) **02 points** Montrer que $r' < 0$ pour r assez grand et $r' > 0$ pour r assez petit.

Solution. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} r' &\leq r(3 + 2r - r^2) < 0 \text{ pour } r > 3, \\ r' &\geq r(3 - 2r - r^2) > 0 \text{ pour } r < 1. \end{aligned}$$

e) **02 points** En déduire que (1) admet une solution périodique.

Solution: On applique le th. de Poincaré-Bendixon sur la région

$$D_\epsilon = \left\{ (x, y) : 1 - \epsilon < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 - \epsilon \right\}$$

Exercice 2.05 points

Soit

$$(2) \quad x'(t) = A(t)x, x \in \mathbb{R}^2$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

1) **01 point** Pour chaque t fixé, calculer les valeurs propres.

Solution: un calcul simple montre que

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

ainsi, si la stabilité par linéarisation est vraie, le point $(0, 0)$ est asym. stable.

2) **01 point** Montrer que

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t)e^{\frac{t}{2}} \\ \sin(t)e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

est une solution de (2).

3) **01 point** Calculer $\|y(t)\|^2$, où $\|(a, b)\|^2 = a^2 + b^2$.

Solution:

$$\|y(t)\|^2 = [-\cos(t)e^{\frac{t}{2}}]^2 + [\sin(t)e^{\frac{t}{2}}]^2 = e^t \rightarrow +\infty$$

4) **02 points** Le point d'équilibre $x = 0$ est-il stable? Conclure.

Solution: On remarque d'après (3) que la solution n'est pas stable. Ainsi, les valeurs propres dans le cas non autonome ne prédisent rien.

Exercice 3. 06 points (C.C) Soit le système

$$(3) \begin{cases} x' = 4y \\ y' = -x + y - x^2y - 4y \end{cases}$$

a) **01.5 points** Donner la nature du point d'équilibre $(0, 0)$.

b) **01.5 points** Soit

$$V(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Montrer que $V' \leq 0$ si $x^2 + 4y^2 > 2$.

c) **03 points** En déduire l'existence d'une solution périodique.

Solution:

a) On remarque que $(0, 0)$ est un point d'équilibre. La Jacobienne

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

montre que $(0, 0)$ est un foyer instable.

b) on a

$$\frac{1}{2}V'(x(t), y(t)) = 4y^2 (1 - x^2 - 4y^2)$$

ainsi si $x^2 + 4y^2 > 2$, on a $V' \leq 0$.

c) Comme $(0, 0)$ est instable, on peut former un cercle, sur lequel le champ est sortant. La fonction V joue le rôle d'une fonction de Lyapounov, décroissante sur l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 2$,

d'après le thm. de Poincaré Bendixon, il existe un cycle limite à l'intérieur de la région

$$\{(x, y) : \varepsilon < x^2 + 4y^2 < 2 + \varepsilon\}$$

Remarque: C.C=contrôle continu.