Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2020-2021
Module : Contrôle des systèmes
Date : 09-03-2021

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL

Exercice 1 (12 points) : Etude d'un système prédateurs-proies en dimension finie.

Considérons le système prédateurs-proies contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\,(1 - y(t) + u(t))\,, \\ \dot{y}(t) = -y(t)\,(1 - x(t))\,, \end{cases}$$

où le contrôle $u(t) \in \mathbb{R}$.

1. **Etude du système sans contrôle**. Dans cette question, on pose $u = 0$.

(a) Montrer que $(x = 1; y = 1)$ est un point d'équilibre du système.

(b) Montrer que la fonction $V(x;y) = x - 1 - \ln(x) + y - 1 - \ln(y)$ est constante le long de toute solution.

(c) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(d) En déduire que la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ est positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et ne s'annule qu'en $x = 1$.

(e) En déduire de la question précédente que V est une fonction de Lyapunov non stricte pour le système sans contrôle.

2. **Contrôlabilité locale au point d'équilibre, et stabilisation locale.**

(a) Linéariser le système au voisinage du point d'équilibre $x = 1$, $y = 1$, et $u = 0$.

(b) Démontrer que ce système linéarisé est contrôlable.

(c) En déduire l'existence d'un contrôle feedback linéaire stabilisant localement le système en sa position d'équilibre $(x = 1; y = 1)$. Chercher une expression explicite d'un tel feedback.

Exercice 2 (08 points) :

On considère le mouvement (planaire) d'un navire en présence de houle. Dans un référentiel fixe, à l'instant t, le navire est repéré par trois coordonnées $(x(t); y(t); \theta(t))$, où $(x; y)$ est la position dans le plan $\mathbb{R}^2$ et θ est un angle par rapport à un axe fixe. On note $v(t)$ la vitesse relative latérale due à la houle. Le pilotage du navire se fait avec deux contrôles scalaires (supposés non contraints) : $u_1(t)$ (contrôle de la vitesse axiale) et $u_2(t)$ (contrôle de la rotation du navire).

Le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t)\cos\theta(t) - v(t)\sin\theta(t), \\ \dot{y}(t) = u_1(t)\sin\theta(t) + v(t)\cos\theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = u_2(t)\,, \\ \dot{v}(t) = -u_1(t)\,u_2(t) - v(t)\,. \end{cases}$$

Le système part d'une condition initiale fixée : $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $v(0) = v_0$.

1) Ecrire le système linéarisé en le point d'équilibre $\left(\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{\theta},\ \overline{v} = 0\right)$, $\overline{u_1} = 0$, $\overline{u_2} = 0$. Montrer qu'il n'est pas contrôlable, même si on se restreint aux 3 premières variables.

2) On fixe maintenant le contrôle $u_2(t) = 1$ constant, et on suppose que $\theta(0) = 0$.

2.1) Vérifier que $\theta(t) = t$.

2.2) En déduire que le système de contrôle s'écrit

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix} u_1(t).$$

2.2.1) On pose par defintion $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $B_i(t) = A(t)B_{i-1}(t) - \frac{d}{dt}B_{i-1}(t)$ pour $i = 1, 2$ avec $B_0(t) = B(t)$.

2.2.2) En déduire que le système de contrôle (1) est contrôlable.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2020 - 2021
Module : Contrôle des systèmes.
Date : 09-03-2021

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé de l'examen final.

Exercice 1

1°)

(a) On pose $f_1(x,y) = x(1-y)$ et $f_2(x,y) = -y(1-x)$.

Comme $f_1(1,1) = f_2(1,1) = 0$, alors le point $(x,y) = (1,1)$ est un point d'équilibre du système.

(b) Montrons que la fonction $V(x;y) = x - 1 - \ln(x) + y - 1 - \ln(y)$ est constante le long de toute solution.

On a,
$$\frac{d}{dt}V(x,y) = \dot{x}(t)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) + \dot{y}(t)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)$$
$$= x(1-y)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right) - y(1-x)\left(1-\frac{1}{y}\right)$$
$$= x(1-y) - (1-y) - y(1-x) + (1-x)$$

$= x - xy - 1 + y - y + yx + 1 - x$

$= 0.$

Alors la fonction V est constante le long de toute solution.

(c) Étudions les variations de la fonction $x \longmapsto x - 1 - \ln(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

On pose,

$$\varphi(x) = x - 1 - \ln(x), \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

On a; $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Alors, on a le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après la question précédente il résulte que la fonction $x \longmapsto x - 1 - \ln(x)$ est positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et ne s'annule qu'en $x = 1$.

(e) On a,

*) La fonction V est de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

**) $V(1,1) = 0$ et $V(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2 \setminus \{(1,1)\}$.

et

***) $\frac{d}{dt} V(x,y) = 0 \leq 0$, $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$.

Alors la fonction V est une fonction de Lyapunov non stricte pour le système sans contrôle.

2)

(a) La linéarisation du système au voisinage du point d'équilibre $x = 1$, $y = 1$, et $u = 0$.

On pose par définition

$$f(x,y,u) = x(1 - y + u),$$

et $$g(x,y,u) = -y(1 - x).$$

On a,

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(1,1,0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(1,1,0) \end{pmatrix} \delta u.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta u.$$

(b) Montrons que le système linéarisé est contrôlable.

Pour cela on va utiliser le critère de Kalman.

On pose par définition

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Kalman $C_1 = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 B_1 \end{pmatrix}$ est

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a,

$$\text{dét } C_1 = 1 \neq 0.$$

Alors $\text{rg } C_1 = 2$ et par conséquent le système linéarisé est contrôlable.

(c) Comme le système linéarisé est contrôlable alors il est stabilisable par feedback linéaire c'est-à-dire il existe $K = (k_1 \quad k_2)$ avec $k_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ tel que le système bouclé par le feedback

$\delta u(t) = K.\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}(t) \\ \delta \dot{y}(t) \end{pmatrix} = (A_1 + B_1 K) \begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix}$$

soit asymptotiquement stable.

Donnons l'expression explicite du feedback.

Ora,

$$A_1 + B_1 K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\lambda I_2 - (A_1 + B_1 K)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - k_1 & 1 - k_2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Par suite le polynôme caractéristique est

$$\lambda(\lambda - k_1) + 1 - k_2$$

C'est-à-dire,

$$\lambda^2 - k_1\lambda + 1 - k_2.$$

Pour que $(A_1 + B_1 K)$ soit Hurwitz il faut et il suffit de choisir $k_1 < 0$ et $k_2 < 1$.

En conclusion

$$K = (k_1 \quad k_2),$$

avec $k_1 < 0$ et $k_2 < 1$.

<u>Exercice 2</u>

1°)

1.1°) Donnons le système linéarisé en le point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \bar{v} = 0)$, $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$.

Pour cela, on pose

$f_1(x, y, \theta, v, u_1, u_2) = u_1 \cdot \cos\theta - v \cdot \sin\theta,$

$f_2(x, y, \theta, v, u_1, u_2) = u_1 \cdot \sin\theta + v \cdot \cos\theta,$

$f_3(x, y, \theta, v, u_1, u_2) = u_2,$

$f_4(x, y, \theta, v, u_1, u_2) = -u_1 \cdot u_2 - v,$

et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, 0, 0, 0) = Z.$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(Z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(Z) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(Z) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(Z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(Z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(Z) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(Z) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(Z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(Z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(Z) & \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(Z) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(Z) \\ \frac{\partial f_4}{\partial x}(Z) & \frac{\partial f_4}{\partial y}(Z) & \frac{\partial f_4}{\partial \theta}(Z) & \frac{\partial f_4}{\partial v}(Z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta\theta \\ \delta v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(Z) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(Z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(Z) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(Z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(Z) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(Z) \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1}(Z) & \frac{\partial f_4}{\partial u_2}(Z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin\bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta\theta \\ \delta v \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta} & 0 \\ \sin\bar{\theta} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}.$$

1.2°) Montrons que le système linéarisé n'est pas contrôlable.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin\bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $$B = \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta} & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On va appliquer le critère de Kalman.

On a,

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $rg(C) = 1 < 4$.

Par suite le système linéarisé n'est pas contrôlable.

2°)

2.1°) On a, $\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 1, \\ \theta(0) = 0. \end{cases}$

Comme $\dot{\theta}(t) = 1$, alors $\theta(t) = t + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

et comme $\theta(0) = 0$, on obtient $\alpha = 0$.

Ce qui donne, $\theta(t) = t$.

2.2°)

Comme $\theta(t) = t$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t)\cos t - v(t)\sin t \\ \dot{y}(t) = u_1(t)\sin t + v(t)\cos t \\ \dot{v}(t) = -u_1(t) - v(t). \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix} u_1(t)$$

2.2.1°) Calculons $B_1(t)$ et $B_2(t)$.

On a,

$$B_1(t) = A(t)\,B_0(t) - \frac{d}{dt} B_0(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$B_2(t) = A(t)\,B_1(t) - \frac{d}{dt}B_1(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin t - 2\cos t \\ \cos t - 2\sin t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.2.2) En déduire que le système de contrôle (1) est contrôlable.

On a,

$$\begin{vmatrix} B_0(t) & B_1(t) & B_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & 2\sin t & -\sin t - 2\cos t \\ \sin t & -2\cos t & \cos t - 2\sin t \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \begin{vmatrix} -2\cos t & \cos t - 2\sin t \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\sin t \begin{vmatrix} \sin t & \cos t - 2\sin t \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-(\sin t + 2\cos t) \begin{vmatrix} \sin t & -2\cos t \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \left(2\cos t - \cos t + 2\sin t\right) - 2\sin t \left(-\sin t + \cos t - 2\sin t\right)$$

$$- (\sin t + 2\cos t)(\sin t - 2\cos t)$$

$$= \cos^2 t + 2\cos t \sin t + 6\sin^2 t - 2\sin t \cos t - \sin^2 t + 4\cos^2 t$$

$$= 5\cos^2 t + 5\sin^2 t = 5 \neq 0.$$

Alors $rg\,(B_0(t)\ B_1(t)\ B_2(t)) = 3$ pour tout temps et par conséquent le système (1) est contrôlable.