Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tlemcen

Module :Transformations Intégrales, Examen de Rattrapage, Juin 2021, Durée 1h30'.

Exercice 1:**06 pts** Résoudre par la transformée de Laplace

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solution:

On applique la transformation de Laplace sur l'équation

$$L\left(y'' - 2y' + 2y\right) = 0$$

ainsi, on aura

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{(s-1-i)(s-1+i)}$$

un calcul simple donne que

$$y(t) = e^t \sin t$$

Exercice 2: **08 pts** Soit l'équation des ondes

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ x \in R, \quad t \geq 0$$

avec $c$ un paramètre réel.

a) 01 ptsSoit $\widehat{u}$ la transformée de Fourier de $u$ par rapport à la variable $x$, montrer que

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(k,t)$$

b) Résoudre (1) avec

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

Solution: a) On a

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ikx} dx = \int_R \lim_{h\to 0} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} e^{-ikx} dx = \lim_{h\to 0} \int_R \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} e^{-ikx} dx$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{u}(k,t+h) - \widehat{u}(k,t+h)}{h} = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(k,t)$$

b) 02 pts La transformée de Fourier donne

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(k,t) = -c^2 k^2 \widehat{u}(k,t)$$

la solution d'une EDO du second ordre donne (02 pts)

$$\widehat{u}\left(k,t\right)=\widehat{F}\left(k\right)e^{-ikct}+\widehat{G}\left(k\right)e^{-ikct}$$

où

$$\widehat{F}\left(k\right),\widehat{G}\left(k\right)$$

des fonctions de la variable $k$.Ceci implique que (01 pt)

$$u(x,t)=F\left(x-ct\right)+G\left(x+ct\right)$$

La condition initiale

$$\begin{aligned} u\left(x,0\right)&=f(x)=F\left(x\right)+G\left(x\right)\\ u_t\left(x,0\right)&=G\left(x\right)-F\left(x\right)=0\end{aligned}$$

ceci donne

$$F\left(x\right)=G\left(x\right)=\frac{f(x)}{2}$$

et la solution $u$ est donnée par (02 pts)

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f\left(x-ct\right)+f\left(x+ct\right)\right]$$

Exercice 3:**06 pts**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles mesurables de mesure finie dans $\mathbb{R}^n$. Montrr que $A+B$ est d'intérieur non vide.

solution:

Soient $A$ et $B$ deux ensembles mesurables de mesure finie dans $\mathbb{R}^n$. Montrr que $A+B$ est d'intérieur non vide.

Notation: $f_A$= fonction caractéristique d'un ensemble $A$.

On ecrit le produit de convolution de $f_A$ et $f_B$. On a alors, pour $x\in\mathbb{R}^n$

$$h(x):=(f_A\star f_B)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f_A(x-y)f_B(y)dy.$$

On remarquera que $h$ est bien définie car $f_A$ et $f_B$ sont dans $L^1:=L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et que c'est une fonction non négative. De manière évidente, on a aussi

$$h(x):=(f_A\star f_B)(x)=\int_B f_A(x-y)dy.$$

Notons $x-B$ l'ensemble formé des sommes $x-y$ avec $y\in B$. Donc $h(x)=\int_{x-B}f_A(z)d$. Si $x\notin A+B$ then $(x-B)\cap A=\{\emptyset\}$ et donc $h(x)=0$. Par ailleurs un raisonnement par l'absurde montre que $h$ n'est pas la fonction nulle si $A$ et $B$ sont de mesure STRICTEMENT positive . Comme $h$ est continue (ca se montre à la main), alors $h>0$ sur un ouvert contenu dans $A+B$.