Université de Tlemcen

Département de Mathématiques, Module: Transformations Intégrales, Année Universitaire 2020-2021.

Examen Final, Durée 1h30'

L'usage de table de Laplace est permis

Exercice 1:(07 pts) Soit le problème

$$(E1) \qquad y'' + 3ty' - 6y = 2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

a) Montrer que la transformée de Laplace $L(y) = Y(s)$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$(E2) \qquad \frac{d}{ds}Y + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y = \frac{-2}{3s^2}$$

b) résoudre l'équation $(E2)$ .En déduire la solution de $(E1)$.

Exercice 2.:(07 pts) Soit le problème

$$(S) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in R, \ y > 0$$

avec la condition au bord

$$u(x,0) = g(x), \quad \lim_{y \to \infty} u(x,y) = 0$$

Soit $U(k,y)$ la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x.

a) Donner l'équation différentielle que vérifie $U(k,y)$ par rapport à la variable y.

b) Donner la solution de (S) .

Exercice 3: (06 pts) La convolution de deux Gaussiennes est elle une Gaussienne ? (Justfier votre réponse).

Université de Tlemcen

Département de Mathématiques, Module: Transformations Intégrales, Année Universitaire 2020-2021.

Examen, Durée 1h30'

Exercice 1:Soit le problème

$$(E1) \qquad y'' + 3ty' - 6y = 2, \qquad y(0) = 0, \ \ y\prime(0) = 0$$

a) Montrer la transformée de Laplace $L(y) = Y(s)$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$(E2) \qquad \frac{d}{ds}Y + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y = \frac{-2}{3s^2}$$

b) résoudre l'équation $(E2)$ .En déduire la solution de $(E1)$.

Solution:a) facile

b) on calcule le facteur intégrant, on aura

$$\mu(s) = s^3 e^{-\frac{s^2}{6}}$$

ceci implique que

$$s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y = 2e^{-\frac{s^2}{6}} + c, \ \ c \in R$$

et

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + c\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}$$

Comme $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$, alors on conclut que $c = 0$.La solution $y(t)$ est la transformée inverse de $Y(s)$, $i.e$

$$y(t) = t^2.$$

Exercice 2.Soit le problème

$$(S) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x \in R, \ \ y > 0$$

avec la condition au bord

$$u(x,0) = g(x), \qquad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$$

Soit $U(k,y)$ la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x.

a) Donner l'équation différentielle que vérifie $U(k,y)$ par rapport à la variable y.

b) Donner la solution de (S) .

Solution:

$$
\begin{aligned}
-k^2U+\frac{d^2U}{dy^2}&=0\\
U\left(k,y\right)&=\widehat{g}\left(k\right)\\
\lim_{y\to\infty}U\left(k,y\right)&=0
\end{aligned}
$$

ceci implique que

$$U\left(k,y\right)=\widehat{g}\left(k\right)e^{-|k|y}$$

et

$$
\begin{aligned}
u\left(x,y\right)&=g(x)*F^{-1}\left(e^{-|k|y}\right)\\
&=g(x)*\left(\frac{y}{\pi\left(x^2+y^2\right)}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 3: La convolution de deux Gaussiènnes est elle une Gaussiènne ?
Solution : réponse est oui: En effet soit

$$G_\sigma\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

une Gaussiènne.On a

$$\widehat{G_\sigma*G_{\sigma'}}=\widehat{G_\sigma}\widehat{G_{\sigma'}}=e^{-\sigma^2k^2}e^{-\sigma'^2k^2}=e^{-k^2\left(\sigma^2+\sigma'^2\right)}$$

Ainsi la transformée inverse

$$G_\sigma*G_{\sigma'}=F^{-1}\left(e^{-k^2\left(\sigma^2+\sigma'^2\right)}\right)=G_{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}$$