Université Abou Bekr Belkaid — 2020/2021
Département de Mathématiques — L3 Mathématiques
Module : Optimisation sans contraintes

Epreuve finale

Exercice 1 (Sur 7 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^4$

1. Montrer que f est coercive.
2. En déduire que le problème $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ possède au moins une solution.
3. Trouver les points critiques de la fonction et préciser leur nature.

Solution

1. **(Sur 2 points)** On sait que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$-xy \geq -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

et

$$y^4 \geq 2y^2 - 1$$

alors

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 2x^2 - xy + y^4 \\
&\geq 2x^2 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + y^4 \\
&\geq \frac{3}{2}x^2 + y^4 - \frac{1}{2}y^2 \\
&\geq \frac{3}{2}x^2 + 2y^2 - 1 - \frac{1}{2}y^2 \\
&\geq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) - 1 \\
&\geq \frac{3}{2}\left\|(x,y)\right\|^2 - 1
\end{aligned}$$

2. **(Sur 1 point)** La fonction f est continue et coercive elle admet au moins un minimum.
3. **(Sur 4 points)** Le gradient de la fonction f est

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - y \\ 4y^3 - x \end{pmatrix}$$

L'équation d'Euler $\nabla f(x,y) = 0$ a pour solutions les points critiques suivants $(0,0)$, $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$ et $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right)$.

Pour déterminer leurs natures nous allons utiliser la condition du second ordre.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Au point $(0,0)$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de $\nabla^2 f\,(0,0)$ sont $\lambda_1 = \sqrt{5}+2 > 0$ et $\lambda_2 = 2-\sqrt{5} < 0$. Ces valeurs propres sont non nulles mais de signe mixte, alors il s'agit d'un point selle.
Au point $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$ la matrice hessienne est

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Le déterminent $\det(\nabla^2 f\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)) = 2$ donc tous les mineurs principaux de$\nabla^2 f\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$ sont strictement positifs le critère de Sylvester permet d'affirmer que $\nabla^2 f\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$ est une matrice définie positive, le point $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$ est donc un minimum local.
Au point $\left(-\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\right)$ la matrice hessienne est

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \nabla^2 f\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$$

le même raisonnement que précédemment permet d'affirmer que le point $\left(-\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\right)$ est un minimum local.

Exercice 2 (Sur 5 points)

On considère le problème (P) suivant

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} J(x)$$

où $J(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\overline{x} = (0,0)^t$ est l'unique solution du problème (P).
2. Soit $\alpha > 0$ et soit la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha A x^{(k)}$$

Montrer que si $\alpha \in \left]0,\frac{2}{5}\right[$, alors pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$, la suite $\left(x^{(k)}\right)$ converge vers $\overline{x}$.
Quel est le pas optimal $\overline{\alpha}$?

Solution

1. **(Sur 3 points)** Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$ on déduit que A est définie positive.
La fonction $J(x)$ est une forme quadratique définie positive elle est fortement convexe et coercive.
Le problème (P) admet donc une solution unique solution de l'équation

$$\nabla J(x) = 0$$

Or

$$\nabla J(x) = Ax$$

Comme A est inversible $Ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et donc $\overline{x}$ est l'unique solution de (P).
2. **(Sur 2 points)** La suite est engendrée par la méthode du gradient à pas fixe. d'après le théorème du cours cette méthode converge si et seulement si $\alpha \in \left]0,\frac{2}{\rho(A)} = \frac{2}{5}\right[$.

Le pas optimal est donné par la formule

$$\overline{\alpha} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3 (Sur 8 points)
On considère la fonction $f(x) = (x_1 + x_2^2)^2$.
1. Montrer que la direction $d = (1, -1)^t$ est une direction de descente au point $x^{(0)} = (0, 1)^t$.
2. Déterminer le pas optimal α_0 qui minimise $g(\alpha) = f\left(x^{(0)} + \alpha d\right)$.
Vérifier que $f\left(x^{(0)} + \alpha_0 d\right) < f\left(x^{(0)}\right)$.
3. Calculer la direction $\widetilde{d}$ associée à la méthode de Newton au point $x^{(0)}$. S'agit-il d'une direction de descente ?
4. Faire une itération de la méthode de Newton à partir de $x^{(0)}$. Conclure.
On donne l'identité $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 2\,(2x-1)\,(x^2 - x + 1)$
Solution
1. **(Sur 1 point)** d est une direction de descente en $x^{(0)}$ si

$$\left\langle d, \nabla f\left(x^{(0)}\right)\right\rangle < 0$$

Le gradient de f est

$$\nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2^2 + 2x_1 \\ 4x_2\left(x_2^2 + x_1\right) \end{pmatrix}$$

alors

$$\left\langle d, \nabla f\left(x^{(0)}\right)\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 < 0$$

ce qui implique que d est une direction de descente en $x^{(0)}$.

$$\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

2. **(Sur 2 points)** On a

$$g(\alpha) = \left(\alpha + (1-\alpha)^2\right)^2$$

ce qui donne

$$g'(\alpha) = 2\,(2\alpha - 1)\left(\alpha^2 - \alpha + 1\right)$$

Donc $g'(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$
De plus $g''(\alpha) = 12\alpha^2 - 12\alpha + 6 \Longrightarrow g''(\frac{1}{2}) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0$ par suite $\alpha = \frac{1}{2}$ est le minimum de la fonction g.
On a

$$x^{(0)} + \alpha_0 d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On voit bien que

$$f(x^{(0)} + \alpha_0 d) = \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 = \frac{9}{16} < 1 = f(x^{(0)})$$

3. **(Sur 2.5 points)**

$$\widetilde{d} = -\left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(0)}\right)$$

Où

$$\nabla^2 f\left(x\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4x_2 \\ 4x_2 & 12x_2^2 + 4x_1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

et

$$\left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

par suite

$$\left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La direction de la méthode de Newton est donc

$$\widetilde{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on voit que

$$\left\langle \widetilde{d}, \nabla f\left(x^{(0)}\right) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 < 0$$

On conclut que la direction $\widetilde{d}$ est bien une direction de descente.

4. **(Sur 2.5 points)**

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit que $f(x^{(1)}) = \left(-1 + 1^2\right)^2 = 0$ et comme $f(x) \geq 0$, $\forall x$ alors $x^{(1)}$ est un minimum global de la fonction f.

On conclut que la méthode de Newton converge en une seule itération.