2ème année de Licence de Mathématiques - 2020/2021.

Module : "Analyse 4" - Semestre 2 - Liste de T.D. N° 2.

Exercice 1 : Etudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières, puis la différentiabilité des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 : On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, $E(x) = \|x\|_2^{2\alpha}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne et $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre.

1°/ Calculer $\dfrac{\partial E}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}$, $\forall i,j = 1,\dots,n$.

2°/ On définit l'opérateur Δ (le Laplacien) par :

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}.$$

Calculer ΔE, ensuite déterminer α pour que $\Delta E \equiv 0$ sur le plus grand ouvert possible de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 : Sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, on considère la norme $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

1°/ Montrer que pour deux matrices A et B, on a : $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

2°/ Soit l'application $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto P(X) = XAX$$

où A est une matrice fixée. Montrer que P est différentiable en tout point X_0 et calculer sa différentielle en ce point dP_{X_0}.

Exercice 4 : Pour les applications suivantes, déterminer des ouverts où elles sont localement inversibles :

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (r,\theta) \longmapsto (x,y) \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$F_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z) \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$F_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (r,\theta,h) \longmapsto (x,y,z) \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h. \end{cases}$$

Exercice 5 : Soit $(\mathcal{H}_1)$ l'hyperbole d'équation : $x^2 - y^2 = 1$.
Fixons un point $(a,b) \in (\mathcal{H}_1)$. A quelles conditions peut-on dire qu'au voisinage de (a,b), y est une fonction de x.
Même question pour l'hyperbole $(\mathcal{H}_{-1})$: $x^2 - y^2 = -1$.

Exercice 6 : Soit (S) la sphère euclidienne d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Montrer qu'au voisinage de tout point de (S), on peut considérer qu'l'une des variables est fonction des deux autres.

Exercice 7 : On donne $f(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ $(\alpha \neq \pm 1)$.
Déterminer, suivant les valeurs de α, les points critiques de f, puis étudier leur nature (maximum, minimum, point selle, ...)

Exercice 8 : Déterminer les extremums des fonctions suivantes et étudier leurs natures :

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$$

$$g(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$$

$$h(x,y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$$

Exercice 9 : Déterminer, puis étudier, les extremas de $f(x,y) = e^{axy}$ $(a>0)$ avec la contrainte : $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 10 : Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$

et $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n \,/\, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$.

1/ Montrer que f admet un maximum global sur K et le déterminer.

2/ En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

où $\forall i = 1, \dots, n$, $x_i > 0$, appelée inégalité arithmético-géométrique.

Solutions.

Exercice 1: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f est d'abord définie sur $\mathbb{R}^2$. La continuité en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ a lieu car au voisinage de ce point f est rapport de deux polynômes (de deux variables) qui sont manifestement continus et le dénominateur $x^2+y^2 \neq 0$ dans un voisinage de (x_0,y_0).

Reste à étudier la continuité uniquement en $(0,0)$.

Partons de $(|x|-|y|)^2 \geq 0$ car c'est un carré. Donc

pour $(x,y) \neq (0,0)$, $x^2+y^2-2|xy| \geq 0 \Longrightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Ainsi $|f(x,y)| = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \cdot |xy| \leq \dfrac{1}{2}|xy|$, d'où

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|xy| = 0, \text{ càd } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

et donc f est continue en $(0,0)$. En définitive f est continue partout.

Pour les dérivées partielles premières on a :

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0, \quad (f(h,0)=0).$$

et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^2(x^2+y^2)-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

D'où
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

De même
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

Pour la différentiabilité de f, on peut dire qu'en dehors de $(0,0)$ f est différentiable comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Reste la différentiabilité en $(0,0)$. Là, il y a deux façons de procéder.

<u>1ère méthode</u>: Utiliser un théorème du cours qui affirme qu'une fonction est différentiable si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en $(0,0)$. L'existence est déjà établie, reste la continuité.

On a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0}\right| = \frac{2|xy^4|}{(x^2+y^2)^2}$. Pour majorer on peut utiliser les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2r^5\cos\theta(\sin\theta)^4}{r^4} = 2r\cos\theta\sin^4\theta$

$$\Rightarrow \left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2r\,|\cos\theta\sin^4\theta| \leq 2r \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial f/\partial x\,(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, c'est la continuité en $(0,0)$.

La même étude donne $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue en $(0,0)$. Donc f est différentiable en $(0,0)$.

<u>2ème méthode</u>: Nous avons déjà obtenu $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Donc <u>si</u> f est différentiable, la seule possibilité pour sa différentielle est $df_{(0,0)}(h_1,h_2) = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0$. Pour montrer que $df_{(0,0)}(h_1,h_2) \equiv 0$ est vé element la différentielle, il faut pouvoir utiliser la définition:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\|h\|} = 0. \text{ Or } \frac{f(h_1,h_2) - \overset{0}{f(0,0)} - \overset{0}{df_{(0,0)}(h_1,h_2)}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

A partir de $\frac{|h_1h_2|}{h_1^2+h_2^2} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 1/4$

càd $\frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{4}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

La continuité en dehors de $(0,0,0)$ est évidente puisque g est le rapport de deux polynômes dont le dénominateur $\neq 0$. Reste à voir la continuité en $(0,0,0)$. Une manière de le faire est la suivante (en s'inspirant de ce qui précède) : $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \leq \dfrac{1}{x^2+y^2}$

d'où $|g(x,y,z)| \leq \dfrac{|xyz|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}|z|$ donc $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = 0$

et c'est la continuité en $(0,0,0)$. g est donc partout continue.

Pour les dérivées d'ordre 1 : $\dfrac{g(t,0,0) - g(0,0,0)}{t} = \dfrac{0-0}{t} = 0$

et donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = 0$. De m̂ pour $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0) = 0$.

Ainsi $$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{yz(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{xz(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

La différentiabilité en dehors de $(0,0,0)$ est évidente à cause de la forme de g. Pour la différentiabilité en $(0,0,0)$ on revient à la définition avec le seul candidat $dg_{(0,0,0)} \equiv 0$. On a : $$\frac{g(h_1,h_2,h_3) - g(0,0,0) - dg_{(0,0,0)}(h_1,h_2,h_3)}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)}} = \frac{h_1 h_2 h_3}{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^{3/2}} = R(h_1,h_2,h_3)$$

Pour $h_1 = \frac{1}{n}$, $h_2 = \frac{1}{n}$, $h_3 = \frac{1}{n}$ on a : $R(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \dfrac{1/n^3}{(3/n^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc g n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.

Exercice 2 : $E(x) = \|x\|_2^{2\alpha} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^\alpha$, $n \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1°/ Remarquons d'abord que pour $\alpha < 0$, E n'est définie que pour $x \neq 0$.

* $\frac{\partial E}{\partial x_i}(x) = \alpha \cdot (2x_i)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha-1} = 2\alpha x_i \|x\|_2^{2\alpha-2}$; $1 \leq i \leq n$.

* Pour les dérivées secondes, prenons d'abord $j \neq i$:

$$\frac{\partial E}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \alpha(\alpha-1)(2x_i)(2x_j)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha-2}$$
$$= 4\alpha(\alpha-1) x_i x_j \|x\|_2^{2\alpha-4}.$$

Si $j = i$: $\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i^2} = 4\alpha(\alpha-1) x_i^2 \|x\|_2^{2\alpha-4} + 2\alpha \|x\|_2^{2\alpha-2}$.

2°/ Calcul de ΔE : $(\Delta E)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}(x)$

$$(\Delta E)(x) = 4\alpha(\alpha-1)\|x\|_2^{2\alpha-4} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\|x\|^2} + 2\alpha n \|x\|_2^{2\alpha-2}$$

$$= 4\alpha(\alpha-1)\|x\|_2^{2\alpha-2} + 2\alpha n \|x\|_2^{2\alpha-2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\Delta E)(x) = 2\alpha(2\alpha-2+n)\|x\|_2^{2\alpha-2}}$$

Pour avoir $(\Delta E)(x) = 0$ sur un ouvert, il faut que $2\alpha(2\alpha-2+n) = 0$
$\Longrightarrow \alpha = 0$ ou $2\alpha-2+n = 0$. Pour $\alpha = 0$, $E(x) \equiv 1$ (sans intérêt).
Reste $2\alpha-2+n = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2-n}{2}} < 0$ car $n \geq 3$.

Donc la fonction $E(x) = \|x\|_2^{2-n}$ vérifie :

$$\boxed{\Delta E \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n - \{0\}}$$

$\mathbb{R}^n - \{0\}$ est le plus grand ouvert où $\Delta E \equiv 0$.

Exercice 3 : Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la norme $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

1°/ On a : $\forall x \neq 0$, $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_2 \leq \|A\| . \|x\|_2$

De là on peut déduire que :

$$\|A.Bx\|_2 \leq \|A\| . \|Bx\|_2 \leq \|A\| . \|B\| . \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, \quad \frac{\|A.Bx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\| . \|B\|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\| . \|B\| \Rightarrow \boxed{\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|}$$

2°/ $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A matrice fixée.

$$X \longmapsto P(X) = XAX$$

On utilise la définition. Calculons $P(X_0 + H)$:

$$P(X_0+H) = (X_0+H).A.(X_0+H) = (X_0+H)(AX_0+AH)$$

$$= \underbrace{X_0AX_0}_{P(X_0)} + \underbrace{X_0AH + HAX_0}_{\text{linéaire en } H.} + HAH$$

(la multiplication des matrices n'est pas commutative)

L'expression $X_0AH + HAX_0$ étant linéaire en H, peut être un candidat à être la différentielle en X_0 ; notons la déjà $dP_{X_0}(H)$

$$P(X_0+H) - P(X_0) - dP_{X_0}(H) = H.A.H$$

$$\Rightarrow \|P(X_0+H) - P(X_0) - dP_{X_0}(H)\| = \|H.A.H\| \leq \|H\| . \|A.H\|$$

$$\leq \|A\| . \|H\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{\|P(X_0+H) - P(X_0) - dP_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \leq \|A\| . \|H\| \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$$

Donc P est bien différentiable en X_0 et la différentielle est donc $\boxed{dP_{X_0}(H) = X_0AH + HAX_0}$

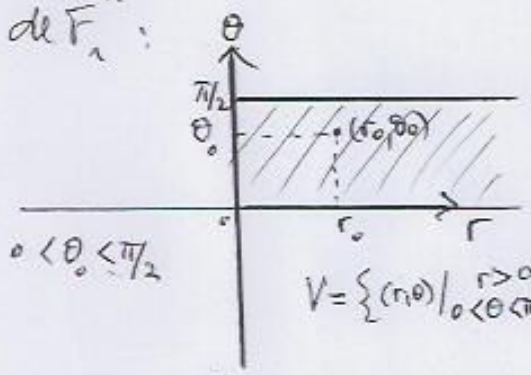
Exercice 4 : a) $F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \longmapsto (x,y)$ où $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (coordonnées polaires)

F_1 est manifestement de classe C^1 puisque x et y sont de classe C^∞ en r, θ. Les points où on a de l'inversibilité locale sont ceux où la matrice jacobienne est inversible (de déterminant $\neq 0$).

On a
$$J_{F_1}(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

et $\det J_{F_1}(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.

On a $\det J_{F_1}(r,\theta) = 0 \iff r = 0$. Donc au voisinage des pts (r_0,θ_0) avec $r_0 \neq 0$, on a l'inversibilité locale. Voici quelques exemples d'ouverts où on a l'inversibilité locale avec l'expression de F_1^{-1} :

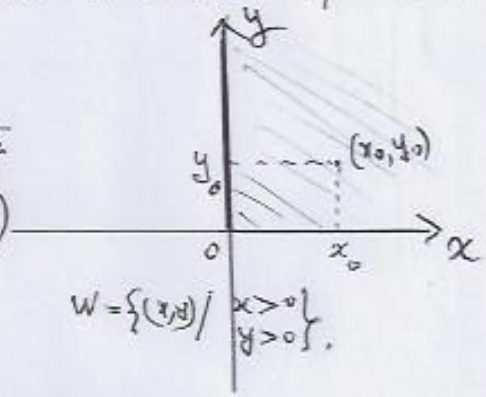


$0 < \theta_0 < \pi/2$

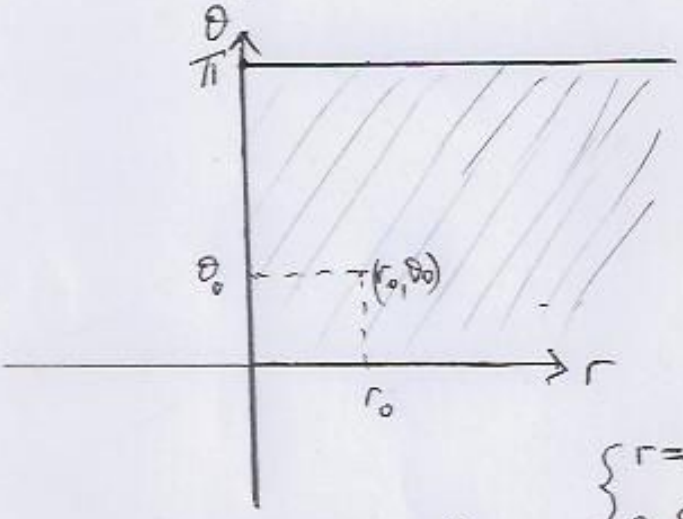
$V = \left\{ (r,\theta) \,/\, \begin{matrix} r>0 \\ 0<\theta<\pi/2 \end{matrix} \right\}$

F_1^{-1}

$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}(y/x) \end{cases}$

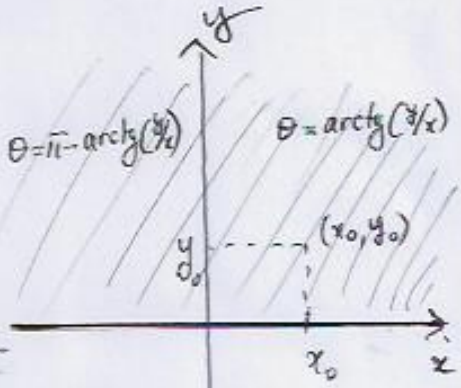


$W = \left\{ (x,y) \,/\, \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix} \right\}$.



$V = \left\{ (r,\theta) \,/\, \begin{matrix} r>0 \\ 0<\theta<\pi \end{matrix} \right\}$

$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=0 \\ \pi - \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x<0 \end{cases} \end{cases}$



$W = \left\{ (x,y) \,/\, \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y>0 \end{matrix} \right\}$.

$$F_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z) \quad \text{où} \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{(coordonnées sphériques)}$$

F_2 est de classe C^∞. Calculons la matrice Jacobienne :

$$J_{F_2}(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

(Développons suivant la dernière ligne)

$$\det(J_{F_2}) = (\cos\theta)\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + (r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\theta)\left[r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right] + (r\sin\theta)\left[r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right]$$

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta = r^2(\sin\theta)\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] = r^2\sin\theta.$$

$$\boxed{\det(J_{F_2}) = r^2\sin\theta}$$

On a $\det(J_{F_2}) \neq 0 \iff r_0^2\sin\theta_0 \neq 0 \iff \begin{cases} r_0 \neq 0 \\ \text{et} \\ \sin\theta_0 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} r_0 \neq 0 \\ \text{et} \\ \theta_0 \neq k\pi \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Des exemples d'ouverts en bijection :

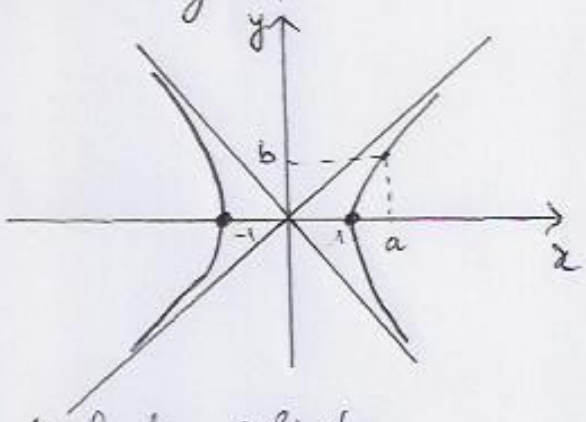
$$V = \left\{(r,\theta,\varphi) \,/\, \begin{matrix} r>0 \\ 0<\theta<\pi/2 \\ 0<\varphi<2\pi \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow W = \underbrace{\{(x,y,z)/z>0\}}_{\text{demi-espace.}} \setminus \underbrace{\{(0,0,z)/z>0\}}_{\text{demi-axe des } z.}$$

$$F_3 : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}, \quad J_{F_3}(r,\theta,h) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \boxed{\det J_{F_3} = r}$$

Exemple d'ouverts :

$$V = \left\{(r,\theta,h) \,/\, \begin{matrix} r>0 \\ 0<\theta<\pi/2 \\ h\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\}, \quad W = \left\{(x,y,z) \,/\, \begin{matrix} x>0,\ y>0 \\ z\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\}.$$

Exercice 5 : $(\mathcal{H}_1)$ hyperbole d'équation : $x^2-y^2=1$



y est une fonction (implicite) de x si au voisinage de (a,b) on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \quad f(x,y) = x^2-y^2-1.$$

C'est une application directe du théorème des fonctions implicites.

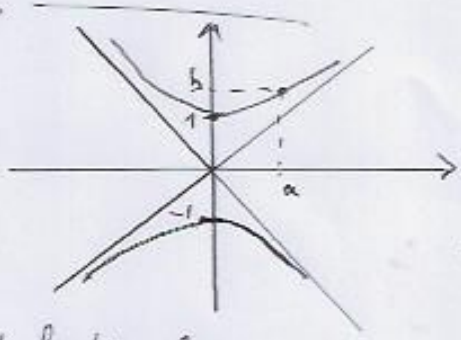
$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \neq 0 \iff y \neq 0$. Donc on doit choisir un pt (a,b) avec $b \neq 0$

Ainsi les seuls points où y n'est pas fonction de x sont $\boxed{(1,0) \text{ et } (-1,0)}$.

Pour tous les autres points, il existe un voisinage de (a,b) où y s'exprime comme fonction de x. Dans ce cas précis, on peut trouver l'expression de y ; on a : $y^2 = x^2-1 \iff y = \pm\sqrt{x^2-1}$. Donc si :

* (a,b) est tel que $\begin{cases} a>1 \\ b>0 \end{cases}$, (cas du dessin) alors $y = \sqrt{x^2-1}$
* " " $\begin{cases} a>1 \\ b<0 \end{cases}$, alors $y = -\sqrt{x^2-1}$
* (a,b) " $\begin{cases} a<-1 \\ b>0 \end{cases}$; " $y = \sqrt{x^2-1}$
* (a,b) " $\begin{cases} a<-1 \\ b<0 \end{cases}$; " $y = -\sqrt{x^2-1}$

Pour $(\mathcal{H}_{-1})$ d'équation $x^2-y^2=-1$



Ici $g(x,y) = x^2-y^2-1$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$

Or $\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \iff y = 0$ mais si $y=0$, $\Rightarrow x^2 = -1$ donc ce n'existe pas. Ainsi $\forall (a,b) \in (\mathcal{H}_{-1})$ $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Au voisinage de tout point y est fonction de x :

* Si (a,b) est tq $b>1$ alors $y = \sqrt{x^2+1}$
* Si (a,b) " $b<-1$, " $y = -\sqrt{x^2+1}$

Exercice 6 : (S) : $x^2+y^2+z^2=1$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial f}{\partial z}=2z$. Ainsi :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=4x^2+4y^2+4z^2=4 \text{ si } (x,y,z)\in(S)$$

Donc en tout point de (S), au moins l'une des dérivées partielles premières est non-nulle. Donc au moins une variable est une fonction implicite des deux autres. Par exemple :

* Si $z_0\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} z=\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } z_0>0 \\ z=-\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } z_0<0 \end{cases}$
* Si $y_0\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2-z^2} & \text{si } y_0>0 \\ y=-\sqrt{1-x^2-z^2} & \text{si } y_0<0 \end{cases}$
* Si $x_0\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{1-y^2-z^2} & \text{si } x_0>0 \\ x=-\sqrt{1-y^2-z^2} & \text{si } x_0<0 \end{cases}$

Exercice 7 : $f(x,y)=x^2+2\alpha xy+y^2$ $(\alpha\neq\pm 1)$.

Les points critiques sont les solutions du système $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2\alpha y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2\alpha x+2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+\alpha y=0\\ \alpha x+y=0\end{cases}.$$ Le déterminant de ce système est $D=\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 1\end{vmatrix}=1-\alpha^2\neq 0$ car $\alpha\neq\pm 1$.

Donc la seule solution est $(0,0)$. Calculons la Hessienne :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2\alpha$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \Rightarrow \text{Hess}_f=\begin{pmatrix}2 & 2\alpha\\ 2\alpha & 2\end{pmatrix}$

On a $\det \text{Hess}_f=4-4\alpha^2=4(1-\alpha^2)\neq 0$. Donc $(0,0)$ n'est pas dégénéré.

$\Delta_1(\text{Hess}_f)=2$ et $\Delta_2(\text{Hess}_f)=4(1-\alpha^2)$.

* Si $\alpha^2<1 \Leftrightarrow -1<\alpha<1$: On a $\Delta_1>0$ et $\Delta_2>0$, $(0,0)$ est un minimum.
* Si $\alpha^2>1 \Leftrightarrow |\alpha|>1$: On a $\Delta_1>0$ et $\Delta_2<0$, $(0,0)$ est un pt col.

Exercice 08 : a/ $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{et} \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ et } y = -1. \end{cases}$$

Ici nous avons deux points critiques : $O(0,0)$ et $A(-1,-1)$.

Calculons la Hessienne : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$

Donc $\text{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

* $\text{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, et $\det(\text{Hess}_f(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$

donc $(0,0)$ n'est pas dégénéré. $\Delta_1(\text{Hess}_f(0,0)) = 0$ et $\Delta_2(\text{Hess}_f(0,0)) = -36 < 0$

C'est un col. On peut le voir autrement : Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de $\text{Hess}_f(0,0)$, alors $\lambda_1 + \lambda_2 = -6$ et $\lambda_1\lambda_2 = -36$. Elles sont de signes contraires, donc $(0,0)$ est un <u>col</u>.

* $\text{Hess}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\text{Hess}_f(-1,-1)) = 72 - 36 = 36 \neq 0$

donc $A(-1,-1)$ n'est pas dégénéré. Ici $\lambda_1 + \lambda_2 = -18$ et $\lambda_1\lambda_2 = 36$.

Les valeurs propres sont de même signe et toutes les deux < 0.

Donc A est un <u>maximum</u> local.

b/ $g(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

On a deux points critiques $A = (0,1)$ et $B = (0,-1)$.

$\text{Hess}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hess}_g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ A est dégénéré.

$\text{Hess}_g(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ B est dégénéré.

On peut quand même étudier leur nature en revenant à la formule de Taylor : Posons $x = h$ et $y = k+1$, (h,k) voisin de $(0,0)$

alors : $g(h,k+1) = h^4 + (k+1)^3 - 3(k+1) - 2$

$$= \underbrace{-4}_{g(0,1)} + 3k^2 + \underbrace{h^4 + k^3}_{R_3} \text{ reste d'ordre 3.}$$

Donc au voisinage de A on a : $g(h,k+1) - g(0,1) = 3k^2 + R_3 \geqslant 0$

Donc A est un minimum local.

Pour B ; on pose $x = h$ et $y = k-1$ $((h,k) \sim (0,0))$.

Alors $g(h,k-1) = h^4 + (k-1)^3 - 3(k-1) - 2$

$$= \underbrace{0}_{g(0,-1)} - 3k^2 + \underbrace{h^4 + k^3}_{R_3}$$

et $g(h,k-1) - g(0,-1) = -3k^2 + R_3 \leqslant 0$. donc B est un max local.

c/ $h(x,y) = x^2y^2(1+x+2y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 2xy^2(1+x+2y) + x^2y^2 = xy^2(2+3x+4y) = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2x^2y(1+x+2y) + 4x^2y^2 = 2x^2y(1+1x+3y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x,y) = (a,0) \text{ ou } (0,b) \text{ ou bien} \\ \begin{cases} 3x+4y = -2 \\ x+3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/5 \\ y = -1/5 \end{cases} \end{cases}$$

Les points critiques sont $A(a,0)$; $B(0,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$ et $C(-2/5, -1/5)$.

$$\boxed{H(x,y) = \text{Hess}_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2(1+3x+2y) & 2xy(2+3x+4y) \\ 2xy(2+3x+4y) & 2x^2(1+x+6y) \end{pmatrix}}$$

* $H(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a^2(1+a) \end{pmatrix}$, $A(a,0)$ est dégénéré.

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2a^2(1+a)$. Donc

- Si $a > -1$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \geq 0 \Rightarrow A(a,0)$ est un minimum local
- Si $a < -1$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow A(a,0)$ " " maximum local.
- Si $a = -1$: On revient à la formule de Taylor :

$$h(-1+t, s) = s^2 \underbrace{(t+2s)}_{\text{change de signe.}} + R_4 \qquad ((t,s) \in \mathcal{V}(0,0)).$$

Donc le pt $(-1,0)$ est un col.

* $H(0,b) = \begin{pmatrix} 2b^2(1+2b) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B(0,b)$ est dégénéré.

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2b^2(1+2b)$. Donc

- Si $b < -1/2$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \leq 0 \Rightarrow B(0,b)$ est un maximum local
- Si $b > -1/2$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \geq 0 \Rightarrow B(0,b)$ " " minimum local.
- Si $b = -1/2$: on revient à la formule de Taylor

$$h(t, -\tfrac{1}{2}+s) = \tfrac{1}{4} t^2 \underbrace{(t+2s)}_{\text{change de signe.}} + R_4$$

Donc le pt $(0, -\frac{1}{2})$ est un col.

* $H(-\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}) = \frac{-1}{125} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$, $C(-\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$ non dégénéré.

$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-6}{25}$, $\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{128}{125} < 0$

Ainsi λ_1 et λ_2 sont de signes contraires, et donc C est un point col.

Exercice 9 : $f(x,y) = e^{axy}$ $(a>0)$, $g(x,y) = x^3+y^3+x+y-4 = 0$

On considère (avec la méthode Lagrange) $F(\lambda,x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = ay e^{axy} - \lambda(3x^2+1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = axe^{axy} - \lambda(3y^2+1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow ae^{axy} = \dfrac{\lambda(3x^2+1)}{y} = \dfrac{\lambda(3y^2+1)}{x}$

$\Rightarrow x(3x^2+1) = y(3y^2+1)$

Considérons la fonction $\varphi(u) = u(3u^2+1) = 3u^3+u$

$\varphi'(u) = 9u^2+1 > 0$

Donc φ est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$), continue, donc est injective $\Rightarrow [\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y]$. D'après la contrainte

on aura : $2x^3+2x-4 = 0 \Leftrightarrow x^3+x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ainsi il y a un seul point critique $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = \frac{1}{4}ae^a \end{cases}$ $A(\frac{1}{4}ae^a, 1, 1)$

$$H_F(A) = \begin{pmatrix} ae^a(a-\frac{3}{2}) & ae^a(a+1) & -4 \\ ae^a(a+1) & ae^a(a-\frac{3}{2}) & -4 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_F^{x,y}(A) = ae^a \begin{pmatrix} a-\frac{3}{2} & a+1 \\ a+1 & a-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On applique la sous-hessienne $H_F^{x,y}(A)$ au sous-espace orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, ce sont les vecteurs du type $\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

On calcule : $\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}^T ae^a \begin{pmatrix} a-\frac{3}{2} & a+1 \\ a+1 & a-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} = -5ae^a h^2 < 0$.

Donc nous sommes devant un <u>maximum local</u>.

Exercice 10 : 1°/ $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \,/\, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \right\}$$

f étant continue et K un compact, f admet donc un maximum global sur K. Nous allons le déterminer. On considère

$$g(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 1 \quad \text{et} \quad F(\lambda, x) = f(x) - \lambda g(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{f(x)}{x_i} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f(x)}{x_i}, \ \forall i = 1,\dots,n$$

$\Rightarrow \forall i \neq j \ \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_j} \Rightarrow x_i = x_j$, donc le pt est $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

et la valeur du maximum est $f\left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$.

2°/ D'après la 1ère question on a :

$$\forall x \in K, \quad f(x) \leq \frac{1}{n^n}.$$

Maintenant si $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\forall i = 1,\dots,n$, $x_i > 0$, on pose

$$x' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x'_i = 1 \text{ et } x' \in K.$$

Donc $f(x') \leq \frac{1}{n^n} \Leftrightarrow \dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leq \dfrac{1}{n^n}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

C'est l'inégalité arithmético-géométrique.