2ème année de Licence de Mathématiques - 2020/2021.

Module : "Analyse 4" - Semestre 2 - Liste de T.D. N° 2.

Exercice 1 : Etudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières, puis la différentiabilité des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 : On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, $E(x) = \|x\|_2^{2\alpha}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne et $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre.

1°/ Calculer $\dfrac{\partial E}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}$, $\forall i,j = 1,\dots,n$.

2°/ On définit l'opérateur Δ (le Laplacien) par :

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}.$$

Calculer ΔE, ensuite déterminer α pour que $\Delta E \equiv 0$ sur le plus grand ouvert possible de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 : Sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, on considère la norme $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

1°/ Montrer que pour deux matrices A et B, on a : $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

2°/ Soit l'application $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto P(X) = XAX$$

où A est une matrice fixée. Montrer que P est différentiable en tout point X_0 et calculer sa différentielle en ce point dP_{X_0}.

Exercice 4 : Pour les applications suivantes, déterminer des ouverts où elles sont localement inversibles :

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (r,\theta) \longmapsto (x,y) \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$F_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z) \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$F_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (r,\theta,h) \longmapsto (x,y,z) \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h. \end{cases}$$

Exercice 5 : Soit $(\mathcal{H}_1)$ l'hyperbole d'équation : $x^2 - y^2 = 1$.
Fixons un point $(a,b) \in (\mathcal{H}_1)$. A quelles conditions peut-on dire qu'au voisinage de (a,b), y est une fonction de x.
Même question pour l'hyperbole $(\mathcal{H}_{-1})$: $x^2 - y^2 = -1$.

Exercice 6 : Soit (S) la sphère euclidienne d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Montrer qu'au voisinage de tout point de (S), on peut considérer qu'l'une des variables est fonction des deux autres.

Exercice 7 : On donne $f(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ $(\alpha \neq \pm 1)$.
Déterminer, suivant les valeurs de α, les points critiques de f, puis étudier leur nature (maximum, minimum, point selle, ...)

Exercice 8 : Déterminer les extremums des fonctions suivantes et étudier leurs natures :

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$$

$$g(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$$

$$h(x,y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$$

Exercice 9 : Déterminer, puis étudier, les extremas de $f(x,y) = e^{axy}$ $(a>0)$ avec la contrainte : $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 10 : Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$

et $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n \,/\, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$.

1/ Montrer que f admet un maximum global sur K et le déterminer.

2/ En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

où $\forall i = 1, \dots, n$, $x_i > 0$, appelée inégalité arithmético-géométrique.