2ème année de Licence de Mathématiques - 2020/2021

Module : "Analyse 4" - Semestre 2 - Liste de T.D. N° 1

Exercice 1 : Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les applications suivantes sont des normes :

$$S(x) = \alpha N_1(x) + \beta N_2(x), \quad \alpha, \beta > 0$$

$$L(x) = \max(N_1(x), N_2(x))$$

Exercice 2 : Posons, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$Q_\alpha(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\alpha xy + y^2}$$

1°/ Pour quelles valeurs de α, Q_α est définie, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2°/ Prenons $-1 < \alpha < 1$, et posons $\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = \sqrt{1-\alpha^2}\, y \end{cases}$. Montrer que l'application $T : (x,y) \longmapsto (u,v)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

3°/ En utilisant T, se ramener à la norme euclidienne pour montrer que Q_α est une norme dans ce cas.

4°/ Dessiner, pour $Q_{1/2}$, la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 3 : Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ équivalentes.

1°/ Montrer que si une suite (x_n) converge vers l avec N_1 alors (et réciproquement) elle converge vers l avec N_2

2°/ Montrer que la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en un point a en utilisant N_1 est équivalente à sa continuité en utilisant N_2.

Exercice 4 : Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$.

On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$, $d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

Montrer que si A est compacte, alors $\exists a \in A$ tel que

$$d_A(x) = \|x - a\|.$$

Solutions.

Exercice 1: Il suffit de vérifier les trois axiomes de la normes.

a/ $S(x) = \alpha N_1(x) + \beta N_2(x)$, $\alpha, \beta > 0$.

* $S(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha N_1(x) + \beta N_2(x) = 0$, c'est une somme de deux nombres ≥ 0, qui est nulle. Donc chaque terme est nul : $\alpha N_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) = 0$ car $\alpha > 0$
  et $\beta N_2(x) = 0 \Rightarrow N_2(x) = 0$ " $\beta > 0$
  Or N_1 et N_2 sont des normes donc $N_1(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$
  (ce n'est pas la peine d'utiliser N_2).

* $S(\lambda x) = \alpha N_1(\lambda x) + \beta N_2(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  $= \alpha |\lambda| N_1(x) + \beta |\lambda| N_2(x)$ car N_1 et N_2 sont deux normes
  $= |\lambda| \left(\alpha N_1(x) + \beta N_2(x)\right) = |\lambda| S(x)$.

* $S(x+y) = \alpha N_1(x+y) + \beta N_2(x+y)$
  $\leq \alpha \left(N_1(x) + N_1(y)\right) + \beta \left(N_2(x) + N_2(y)\right)$ c'est l'inégalité triangulaire pour N_1 et N_2
  $\leq \underbrace{\left(\alpha N_1(x) + \beta N_2(x)\right)}_{S(x)} + \underbrace{\left(\alpha N_1(y) + \beta N_2(y)\right)}_{S(y)}$

b/ $L(x) = \max\left(N_1(x), N_2(x)\right)$.

* $L(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) \leq 0$ et $N_2(x) \leq 0$ car $N_1(x) \leq \max(N_1(x), N_2(x))$ et $N_2(x) \leq \max(N_1(x), N_2(x))$
  or N_1 et N_2 étant des normes sont ≥ 0 càd $N_1(x) = 0$ et $N_2(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

* $L(\lambda x) = \max\left(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)\right) = \max\left(|\lambda| N_1(x), |\lambda| N_2(x)\right)$
  $\geq \begin{cases} |\lambda| N_1(x) \\ \text{et} \\ |\lambda| N_2(x) \end{cases} \geq |\lambda| \max\left(N_1(x), N_2(x)\right)$
  d'où $L(\lambda x) \geq |\lambda| L(x)$.
  Supposons $\lambda \neq 0$, alors $L(x) = L\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot x\right) \geq \frac{1}{|\lambda|} L(\lambda x)$
  càd $L(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot L(x) \Rightarrow L(\lambda x) = |\lambda| L(x)$

Si $\lambda \neq 0$, pour $\lambda = 0$, l'égalité est évidente.

* L'inégalité triangulaire pour L :

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq L(x) + L(y)$$
$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \leq L(x) + L(y)$$

car $N_1(u) \leq \max(N_1(u), N_2(u)) = L(u)$ et de m̂ pour N_2.

Donc $\underbrace{\max(N_1(x+y), N_2(x+y))}_{L(x+y)} \leq L(x) + L(y)$.

Exercice 2 : $Q_\alpha(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\alpha xy + y^2}$

1°/ $Q_\alpha(x,y)$ est définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si et ssi le polynôme $T_1(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ est ≥ 0, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons (par exemple) $y \neq 0$, $T_1(x,y) = y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right)$

Posons $\xi = \frac{x}{y}$. Alors $T_1(x,y) \geq 0 \iff \xi^2 + 2\alpha\xi + 1 \geq 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Ceci implique que le $\Delta \leq 0$, car sinon le polynôme $\xi^2 + 2\alpha\xi + 1$ aura des racines réelles et donc changera de signe. Ainsi $\Delta = 4\alpha^2 - 4 = 4(\alpha^2 - 1) \leq 0 \iff \alpha^2 \leq 1$ et donc la condition est $|\alpha| \leq 1 \iff \boxed{-1 \leq \alpha \leq 1}$

(Rque : si $y = 0$, $T_1(x,0) = x^2 \geq 0$).

2°/ Prenons $-1 < \alpha < 1$: $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (u,v)$ où $\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = \sqrt{1-\alpha^2}\, y \end{cases}$.

T est une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M_T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \sqrt{1-\alpha^2} \end{pmatrix}$. T est bijective si et ssi $\det M_T \neq 0$. Or $\det M_T = \sqrt{1-\alpha^2} \neq 0$ car $-1 < \alpha < 1$.

Rque : si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, $\det M_T = 0$ et T ne sera plus bijective.

3°/ Q_α est une norme si $-1<\alpha<1$: Il est clair que

$$x^2+2\alpha xy+y^2 = (x+\alpha y)^2-\alpha^2y^2+y^2 = (x+\alpha y)^2+(\sqrt{1-\alpha^2}\,y)^2$$
$$= u^2+v^2$$

Ainsi $Q_\alpha(x,y)=\sqrt{u^2+v^2} = \|(u,v)\|_2$.
norme euclidienne.

Vérifions que Q_α est une norme.

* $Q_\alpha(x,y)=0 \iff \|(u,v)\|_2=0 \iff (u,v)=(0,0)$
car $\|\cdot\|_2$ est une norme.

or $(u,v)=T(x,y)=0 \Rightarrow (x,y)=0$ car T est injective.

* $Q_\alpha(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{\lambda^2x^2+2\alpha\lambda^2xy+\lambda^2y^2} = |\lambda|\,Q_\alpha(x,y)$

* $Q_\alpha((x,y)+(x',y')) = \|T((x,y)+(x',y'))\|_2$

$= \|T(x,y)+T(x',y')\|_2$ car T est linéaire

$\leq \|T(x,y)\|_2+\|T(x',y')\|_2$ car $\|\cdot\|_2$ est une norme.

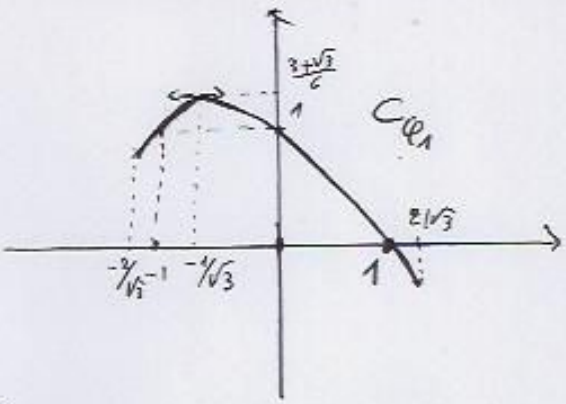
$\leq Q_\alpha(x,y)+Q_\alpha(x',y')$ cqfd.

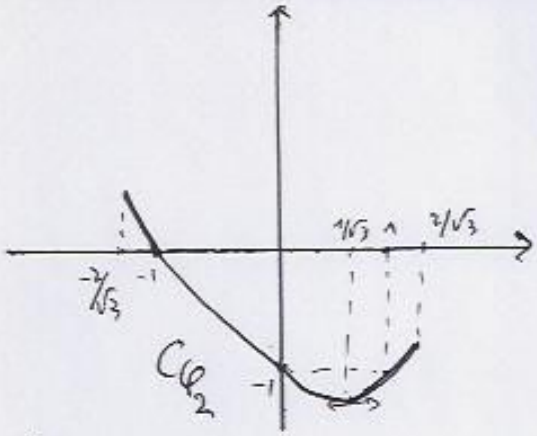
4°/ $Q_{\frac12}(x,y)=\sqrt{x^2+xy+y^2}$. Notons B la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour $Q_{1/2}$, càd :

$$B=\{(x,y)\,/\,Q_{\frac12}(x,y)\leq 1\} \quad \text{(pour la boule fermée)}$$
$$=\{(x,y)\,/\,x^2+xy+y^2\leq 1\}$$
$$=\left\{(x,y)\,/\,\left(y+\tfrac12x\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}x\right)^2\leq 1\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\,/\,-\sqrt{1-\tfrac{3x^2}{4}}\leq y+\tfrac12x\leq\sqrt{1-\tfrac{3x^2}{4}}\right\}$$

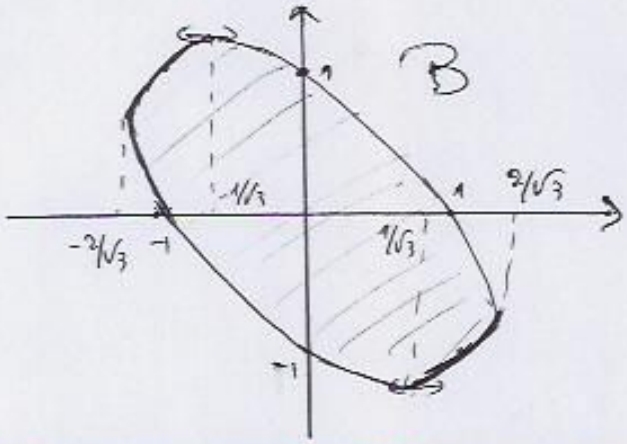
Il suffit de dessiner les graphes des fonctions :

$\varphi_1(x)=-\frac12x+\sqrt{1-\frac{3x^2}{4}}$ et $\varphi_2(x)=-\frac12x-\sqrt{1-\frac{3x^2}{4}}$.





et comme $B = \{(x,y) \,/\, \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x)\}$ alors :



<u>Exercice 3</u> : Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ équivalents càd $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$

1°/ Supposons que $x_n \xrightarrow{N_2} \ell$ càd $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(x_n - \ell) = 0$. Comme $0 \leq N_1(x_n - \ell) \leq \beta N_2(x_n - \ell) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} N_1(x_n - \ell) = 0$ aussi.

Réciproquement si $x_n \xrightarrow{N_1} \ell$ càd $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(x_n - \ell) = 0$, Alors avec $0 \leq N_2(x_n - \ell) \leq \frac{1}{\alpha} N_1(x_n - \ell) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} N_2(x_n - \ell) = 0$.

2°/ Supposons f continue en a avec N_1 càd :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \quad N_1(x-a) \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Maintenant $N_2(x-a) \leq \beta N_2(x-a) \leq \beta \delta'_\varepsilon = \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

càd si $\boxed{\delta'_\varepsilon = \delta_\varepsilon / \beta}$ alors avec δ'_ε on aura :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta'_\varepsilon > 0 : \quad N_2(x-a) \leq \delta'_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

C'est la continuité en a en utilisant N_2.

et Réciproquement.

Exercice 4 : $A \subset \mathbb{R}^n$, compacte.

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x-y\|.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons la fonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longmapsto F(y) = \|x-y\|$

Le problème dit que $F|_A$ atteint son minimum càd $\exists a \in A$ tq $\inf_{y \in A} F(y) = F(a)$. Ceci se démontre aisément si on montre que F est continue. En effet :

$$|F(y) - F(y')| = \big| \|x-y\| - \|x-y'\| \big|$$
$$\leq \|(x-y)-(x-y')\|$$
$$\leq \|y-y'\|.$$

F est donc 1-lipschitzienne (donc continue). On peut démontrer la continuité de F en revenant à la définition :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|y-y'\| \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow |F(y) - F(y')| \leq \varepsilon$

il suffit de prendre $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Maintenant ayant établi que F est continue, d'après le cours, quand on regarde F sur le compact A, elle est minimisée (en fait bornée) et atteint son minimum càd :

$\exists a \in A, \quad \inf_{y \in A} F(y) = F(a)$ ou encore

$$\exists a \in A, \quad \underbrace{\inf_{y \in A} \|x-y\|}_{d_A(x)} = \|x-a\|.$$