2ème année de Licence de Mathématiques - 2020/2021

Module : « Analyse 4 » - Semestre 2 - Liste de T.D. N° 1

Exercice 1 : Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les applications suivantes sont des normes :

$$S(x) = \alpha N_1(x) + \beta N_2(x), \quad \alpha, \beta > 0$$

$$L(x) = \max(N_1(x), N_2(x))$$

Exercice 2 : Posons, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$Q_\alpha(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\alpha xy + y^2}$$

1°/ Pour quelles valeurs de α, Q_α est définie, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2°/ Prenons $-1 < \alpha < 1$, et posons $\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = \sqrt{1-\alpha^2}\, y \end{cases}$. Montrer que l'application $T : (x,y) \longmapsto (u,v)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

3°/ En utilisant T, se ramener à la norme euclidienne pour montrer que Q_α est une norme dans ce cas.

4°/ Dessiner, pour $Q_{1/2}$, la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 3 : Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$.

1°/ Montrer que si une suite (x_n) converge vers l avec N_1 alors (et réciproquement) elle converge vers l avec N_2

2°/ Montrer que la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en un point a en utilisant N_1 est équivalente à sa continuité en utilisant N_2.

Exercice 4 : Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$.

On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$, $d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

Montrer que si A est compacte, alors $\exists\, a \in A$ tel que

$$d_A(x) = \|x - a\|.$$