Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

2$^{\text{ème}}$ année Mathématiques
Semestre 4

Examen de Rattrapage de Géométrie

Durée : 1h30mn
27 Juin 2021

Exercice 1 (4 pts)

Soit f une fonction trois fois dérivable. On considère la courbe paramétrée γ qui à $t \in \mathbb{R}$ associe

$$\gamma(t) = (\exp t, \exp(-t), f(t)).$$

On suppose que f est telle que la courbure de γ ne s'annule pas. Montrer que γ est contenue dans un plan si et seulement si $f' - f^{(3)} = 0$.

Exercice 2 (10 pts)

On fixe un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $b \neq 1$ et soit C le support de la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par

$$\alpha(t) = (ab^t \cos t, ab^t \sin t)$$

Cette courbe est appelée *spirale logarithmique*.

1. Montrer que α est birégulière.
2. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $-\infty$.
3. Soit M un point de C, que vaut le cosinus de l'angle entre la tangente au point M et la droite (OM) ?
4. Notons $l(M)$ la longueur de l'arc de courbe compris entre O et M (c'est-à-dire sur $]-\infty, t]$). Calculer $\dfrac{l(M)}{OM}$.
5. On rappelle que, pour une courbe régulière $\alpha(t)$ de classe C^2, la courbure est donnée par $\kappa(t) = \dfrac{|\det(\alpha'(t), \alpha''(t))|}{\|\alpha'(t)\|^3}$. Calculer la courbure en tout point de C.

Exercice 3 (6 pts)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^∞ dont les cefficients de la première forme fondamentale sont donnés par :

$$\forall (u, v) \in U : E = 1, \quad F = \cos\theta, \quad G = 1$$

avec $\theta : U \longrightarrow]0, \pi[$ de classe C^∞.

1. Montrer que f est régulière.
2. Montrer que f_{uv} est un vecteur normal à la surface.

Corrigé de l'Examen de Rattrapage de Géométrie 2020-2021

Exercice 1. (4 pts)

On considère la courbe paramétrée γ définie par : $\gamma(t) = (\exp(t), \exp(-t), f(t))$. Une courbe est planne si et seulement si sa torsion τ est nulle (0.5pt). Or $\tau(t) = \dfrac{\gamma'(t).(\gamma''(t) \wedge \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$. Ce qui donne

$$\tau(t) = 0 \iff \gamma'(t).(\gamma''(t) \wedge \gamma'''(t)) = 0$$

Calculons les dérivées de γ :

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ f'(t) \end{pmatrix}, \gamma''(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ f''(t) \end{pmatrix}, \gamma'''(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ f'''(t) \end{pmatrix} \quad (1.5pts)$$

Donc

$$\gamma''(t) \wedge \gamma'''(t) = ((f'''(t) + f''(t))\exp(-t), (f''(t) - f'''(t))\exp(t), -2) \quad (0.5pt)$$

Et

$$\gamma'(t).(\gamma''(t) \wedge \gamma'''(t)) = 2(f'''(t) - f'(t)) \quad (1pt)$$

On obtient donc

$$f''' - f' = 0 \iff \tau = 0 \quad (0.5pt)$$

Ce qui correspond bien à la condition demandée.

Exercice 2. (10 pts)

Soit $\alpha(t) = (ab^t \cos t, ab^t \sin t)$ la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que α est birégulière :*
   α est birégulière si $\|\alpha''(t)\| \neq 0$ (0.5 pt). On a
   $$\alpha'(t) = ab^t(\ln(b)\cos t - \sin t, \ln(b)\sin t + \cos t) \quad (0.5pt)$$
   et
   $$\alpha''(t) = ab^t(((\ln b)^2 - 1)\cos t - 2(\ln b)\sin t, ((\ln b)^2 - 1)\sin t + 2(\ln b)\cos t) \quad (1pt)$$
   de norme
   $$\|\alpha''(t)\| = ab^t((\ln b)^2 + 1) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R} \quad (0.5pt)$$
   Donc α est birégulière.
2. On a : Si $b > 1$, $\lim\limits_{t \to -\infty} \alpha(t) = (0,0) = O$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} \alpha'(t) = (0,0)$ car cos et sin sont des fonction bornées et $\lim\limits_{t \to -\infty} b^t = 0$ (la limite n'existe pas si $0 < b < 1$) (1 pt).
3. Soit θ l'angle entre la tangente au point $M = \alpha(t)$ et la droite (OM). Comme (OM) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (\cos t, \sin t)$ (car $\alpha(t) = ab^t\overrightarrow{v}$), on a alors :
   $$\alpha'(t).\overrightarrow{v} = \|\alpha'(t)\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta \quad (0.5pt)$$

D'où

$$\cos\theta = \frac{\alpha'(t).\overrightarrow{v}}{\|\alpha'(t)\|\,\|\overrightarrow{v}\|} \quad (0.5pt)$$

or $\|\alpha'(t)\| = ab^t\sqrt{1+(\ln b)^2}$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ (1 pt). Donc

$$\cos\theta = \frac{ab^t \ln b}{ab^t\sqrt{1+(\ln b)^2}} = \frac{\ln b}{\sqrt{1+(\ln b)^2}} \quad (0.5pt)$$

On remarque que cette angle ne dépend pas du point M.

4. D'après la question précédente, $O = \lim\limits_{t\to-\infty} \alpha(t) \quad (b>1)$, donc pour $M = \alpha(t)$, on a

$$l(M) = \lim_{s\to-\infty} \int_s^t \|\alpha'(u)\|\,du = \lim_{s\to-\infty}\int_s^t ab^u\sqrt{1+(\ln b)^2}du \quad (0.5pt)$$

$$= \lim_{s\to-\infty} a\sqrt{1+(\ln b)^2}\left[\frac{b^u}{\ln b}\right]_s^t = ab^t\frac{\sqrt{1+(\ln b)^2}}{\ln b} = OM\frac{\sqrt{1+(\ln b)^2}}{\ln b} \quad (0.5pt+0.5pt)$$

D'où

$$\frac{l(M)}{OM} = \frac{\sqrt{1+(\ln b)^2}}{\ln b} \quad (0.5pt)$$

On remarque aussi que $l(M)/OM$ ne dépend pas du point M.

5. Il suffit d'appliquer la formule :

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{(ab^t)^2((\ln b)^2+1)}{(ab^t\sqrt{1+(\ln b)^2})^3} = \frac{1}{ab^t\sqrt{1+(\ln b)^2}} \quad (1pt+1pt)$$

Exercice 3. (6 pts)

Soit f une surface paramétrée dont les coefficients de la première forme fondamentale sont donnés par $E=1, F=\cos\theta$, et $G=1$.

1. *Montrons que f est régulière :*
   On a
   $$\|f_u\wedge f_v\|^2 = EG - F^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta \quad (1.5pts)$$
   et puisque $\theta\in\,]0,\pi[$, ceci implique que $\sin\theta>0$ $(1pt)$. Ainsi $f_u\wedge f_v\neq 0$ $(0.5pt)$. Par conséquent f est régulière.
2. *Montrons que f_{uv} est normal à la surface :*
   En prenant la dérivée partielle par rapport à v de
   $$E = f_u.f_u = 1, \quad (0.5pt)$$
   on obtient
   $$2f_{uv}.f_u = 0 \Rightarrow f_{uv}.f_u = 0 \quad (0.5pt)$$
   De même
   $$G = f_v.f_v = 1 \quad (0.5pt)$$
   dérivons par rapport à u, on aura
   $$2f_{uv}.f_v = 0 \Rightarrow f_{uv}.f_v = 0 \quad (0.5pt)$$
   Ainsi f_{uv} est orthogonal à f_u et à f_v, c'est donc un vecteur normal à la surface. (1 pt)